مبادرة

عاوزين نتعلم

المراجعة النهائية

فى

الرياضيات

إعداد

الأستاذ / أحمد السعيد عبد المنعم

الأستاذ / جورج عازر جورج

أولاً

تمارين على طرق العد

حاول أن تحل

(١) اختير ٣ أشخاص معًا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٤ نساء أوجد: كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية:

أ) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

ب) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس؟ أو ← (+)

الحل

أ) الثلاثة إما من الرجال أو من النساء

عدد الطرق = ٥ق٣ + ٤ق٣ = ١٤

ب) إما رجلان وامرأة أو رجل وامرأتان

عدد الطرق = ٥ق٢ × ٤ق١ + ٥ق١ × ٤ق٢ = ١٠ × ٤ + ٥ × ٦ = ٧٠

حاول أن تحل

(٢) يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية، ولا يحق له الانتقال إلى السنة الثانية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية؟

الحل

عدد الطرق هى عدد طرق اختيار ٦ من ٨ أو ٧ من ٨ أو ٨ من ٨

∴ عدد الطرق = ٨ق٦ + ٨ق٧ + ٨ق٨ = ٢٨ + ٨ + ١ = ٣٧

مثال

(٣) حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية:

أ) إذا كان السحب مع الاحلال (التكرار) والترتيب.

ب) إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

جـ) إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب.

الحل

أ) عدد الطرق = $(١٢)^{٣} \times ٨^{٢}$

ب) عدد الطرق = ١٢ل٣ × ٨ل٢

جـ) عدد الطرق = ١٢ق٣ × ٨ق٢

حاول أن تحل

٣ في المثال السابق أوجد عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون في كل من الحالات السابقة.

الحل

(أ) عدد الطرق = $(12)^5 + (8)^5 =$

(ب) عدد الطرق = ١٢ل٥ + ٨ل٥ =

(جـ) عدد الطرق = ١٢ق٥ + ٨ق٥ =

تفكير ناقد أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف.

(أ) إذا كان الموقف على شكل دائرة. (ب) إذا كان الموقف على شكل صف.

الحل

(أ) عدد الطرق = (عدد الأماكن) ل عدد السيارات = ١٠ ل ٤

(ب) عدد الطرق = (عدد الأماكن − عدد السيارات + ١) ل عدد السيارات

= (١٠ − ٤ + ١) ل ٤ = ٧ ل ٤

٤ إذا كانت س = {٢، ٣، ٤، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم اوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س

(أ) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام بالضبط

(ب) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام على الأقل

(جـ) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام على الأكثر

الحل

(أ) عدد الأعداد = عدد طرق اختيار ٣ من ٤ مع الترتيب دون تكرار

= ٤ل٣ =

مئات	عشرات	آحاد
٢	٣	٤

(ب) عدد الأعداد = عدد طرق اختيار ٣ أو ٤ من ٤ بنفس الأسلوب

= ٤ل٣ + ٤ل٤ =

(جـ) عدد الأعداد = ٤ل١ + ٤ل٢ + ٤ل٣ =

الكتاب المقرر صـ١٢

(٣١) لدينا ٤ نقاط فى مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة، أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين؟ ٤ق٢ = ٤ل٢ / ٢! = ٤×٣ / ٢ = ٦

(٣٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟ ٥ق٣

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟ ٢٠ق٤ × ١٠ق٢

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق علي ثلاثة أولاد فقط؟ ٥ق٣ × ٩ق٤

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لايدخل شخص فى اللجنتين فى ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٦ ٦ق٢ − ٦ (ب) ٨ ٨ق٢ − ٨ (جـ) ١٢ ١٢ق٢ − ١٢

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال، ٣ نساء:

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

(جـ) كم لجنة تحتوى علي امرأة واحدة علي الأقل؟

---

(٣١) عدد القطع المستقيمة

∴ عدد طرق الاختيار ٢ من ٤

دون تكرار ودون ترتيب

= ٤ق٢ = ٤ل٢ / ٢! = ٤×٣ / ٢ = ٦

(٣٢) الاختيار بدون تكرار ودون ترتيب

∴ عدد الطرق = ٥ق٣ = ٥ق٢ = ١٠

(٣٣) عدد طرق اختيار الطلبة = ٢٠ق٤ ، عدد طرق اختيار الطالبات = ١٠ق٢

∴ عدد طرق اختيار اللجنة = ٢٠ق٤ × ١٠ق٢ = ٤٨٤٥ × ٤٥ = ٢١٨٠٢٥

(٣٤) عدد طرق اختيار الأولاد = ٥ق٣ ، عدد طرق اختيار البنات = ٩ق٤

∴ عدد طرق اختيار الفريق = ٥ق٣ × ٩ق٤ = ١٠ × ١٢٦ = ١٢٦٠

(٣٥) عدد طرق اختيار اللجنتين معًا = عدد طرق اختيار الأولى × الثانية = ١٢ق٣ × ٩ق٣ = ١٨٤٨٠

(٣٦) (أ) عدد المثلثات = ٤ق٣ = ٤ (ب) ٥ق٣ = ٥ق٢ = ١٠ (جـ) ٦ق٣ = ٢٠

(٣٧) عدد أقطار الشكل = عدد القطع المستقيمة − عدد الأضلاع = نق٢ − ن

(أ) ٦ق٢ − ٦ = ٩ (ب) ٨ق٢ − ٨ = ٢٨ − ٨ = ٢٠ (جـ) ١٢ق٢ − ١٢ = ٥٤

(٣٨) (أ) عدد الطرق المختلفة = عدد طرق اختيار ٤ من ١٢ = ١٢ق٤ = ٤٩٥

(ب) عدد الطرق = ٣ق١ × ٩ق٣ = ٢٥٢

(جـ) العدد الكلي − الرجال = ١٢ق٤ − ٩ق٤

(جـ) امرأة واحدة على الأقل تعني واحدة أو اثنين أو ثلاثة = ٣ق١ × ٩ق٣ + ٣ق٢ × ٩ق٢ + ٣ق٣ × ٩ق١ = ٣٦٩

ثانيا) التباديل والتوافيق

حاول أن تحل

١) إذا كان $^{ن-٤}ل_٩ = {}^{ن-٤}ل_٩$ فأوجد قيمة ن

الحل: $ن-٤ \geq ٩$ ∴ $ن \geq ١٣$ ∴ $ن \in \{١٣، ١٤، ......\}$

٢) حاول أن تحل: إذا كان $^{ن}ل_ر = ٢١٠$ أوجد قيم كل من ن، ر في الجملة

الحل:

ر	١	٣	٢
ن	٢١٠	٧	١٥

خد بالك: $٢١٠ = {}^{٢١٠}ل_١ = {}^{١٥}ل_٢ = {}^{٧}ل_٣$

٣) أوجد قيمة ن في كل مما يأتي

(i) $^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ (ii) $^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$

الحل (i) $^{ن+١}ق_٢ = ٦٦$ ∴ $\frac{^{ن+١}ل_٢}{٢} = ٦٦$ ∴ $^{ن+١}ل_٢ = ١٣٢$

∴ $ن+١ = ١٢$ ∴ $ن = ١١$

(ii) إما $٢ن-١٤ = ن-١$ ∴ $ن = ١٣$

أو $٢ن-١٤ + ن-١ = ٢٥$ ومنها $٣ن = ٤٠$ ∴ $ن = \frac{٤٠}{٣}$ مرفوض

٤) إذا كان $^{١٢}ق_ر : {}^{١٢}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

أوجد كلاً من ن، ر

الحل: $\frac{^{١٢}ق_{ر+١}}{^{١٢}ق_ر} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $\frac{١٣-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $\frac{١٢-ر}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$

ومنها $٩ \times ١٢ - ٩ر = ٥ر + ٥$ ∴ $١٤ر = ١١٢$ ∴ $ر = ٨$

$^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ ∴ $^{ن+١}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

∴ $^{ن+١}ق_٧ = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_٧$ ∴ $ن+١ = ١٤$ ∴ $ن = ١٣$

٥) (i) أوجد قيمة ن التي تحقق أن ن ق ٣ + ٢ (ن ق ٢) + ن ق ١ = ١٢٠

(ii) أوجد قيمة (١٧ق٦ + ١٧ق٥) / ١٨ق٥

الحل

(i) ن ق ٣ + ن ق ٢ + ن ق ٢ + ن ق ١ = ١٢٠

∴ ن+١ ق ٣ + ن+١ ق ٢ = ن+٢ ق ٣ = ١٢٠ = ١٠ق٣

جمع توفيقتين متتاليتين

∴ ن + ٢ = ١٠ ∴ ن = ٨

(ii) ١٨ق٦ / ١٨ق٥ = (١٨ − ٦ + ١) / ٦ = ١٣ / ٦ قانون النسبة بين توفيقتين

٦) إذا كان ن ق ر = ن ق ر−١ ، ن ل ر = ن ل ر+١ فإن ن = ...

الحل

ن = ر + ر − ١ ∴ ن = ٢ر − ١ ⟵ I

ل ن / ل(ن − ر) = ل ن / ل(ن − ر − ١) ∴ ن − ر = ١ ∴ ن = ر + ١ ⟵ II

بالحل ر = ٢ ومنها ن = ٣

٧) إذا كان ن+٢ ل ر = ٢٤ × ن+٢ ق ر ، ن ق ر : ن ق ر+١ = ٥ : ٣

أوجد قيمة ن ق ن−ر + ن+٢ ل ر−١

الحل

ن+٢ ل ر = ل٢ ∴ (ن+٢ ل ر) / ل ر ∴ ل ر = ل٢ ∴ ر = ٢

ن ق ٢ / ن ق ٣ = (ن − ٢ + ١) / ٣ = ٥ / ٣ ∴ ن − ٢ = ٥ ∴ ن = ٧

المطلوب = ٧ق٥ + ١٠ل١ = ٧ق٢ + ١٠ = (٧ × ٦)/(١ × ٢) + ١٠ = ٣١

٨) إذا كان ١٤ق ر² = ١٤ق ر+٢ فما قيمة ر

الحل

ر² = ر + ٢ ∴ ر² − ر − ٢ = صفر ∴ (ر − ٢)(ر + ١) = صفر

ومنها ر = ٢ أو ر = −١ مرفوض

أو ر² + ر + ٢ = ١٤ ∴ ر² + ر − ١٢ = ٠ ∴ (ر + ٤)(ر − ٣) = ٠ ∴ ر = ٣

ر = −٤ مرفوض

ثالثاً: ذات الحدين

(١) انشر مفكوك $(١ - س)^٨$ ثم استخدم ذلك في ايجاد قيمة $١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \dots + {}^{٨}ق_{٨}$

الحل: $(١ - س)^٨ = ١ - {}^{٨}ق_{١}\, س + {}^{٨}ق_{٢}\, س^٢ - {}^{٨}ق_{٣}\, س^٣ + \dots + {}^{٨}ق_{٨}\, س^٨$

بوضع $س = ١$ ∴ المقدار المطلوب = صفر

(٢) في مفكوك $(١ + جـ س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث = ١٨٠ وكان $ح_٥ = ٢١٠$ اوجد قيمة كل من جـ ، س حيث $جـ \in ص^+$

الحل: $ح_٣ = {}^{١٠}ق_{٢} (جـ س)^٢$ ∴ $١٨٠ = {}^{١٠}ق_{٢}\, جـ^٢$ ∴ $جـ = \pm ٢$

$ح_٥ = {}^{١٠}ق_{٤} (جـ س)^٤ = ٢١٠$ ∴ $٢١٠ (جـ س)^٤ = ٢١٠$

∴ $(\pm ٢ س)^٤ = ١$ ∴ $١٦ س^٤ = ١$ ∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

(٣) اوجد معامل $س^٥$ في مفكوك $(١ - س + س^٢)(١ + س)^{١١}$

الحل: المقدار $= (١ + س)^{١١} - س (١ + س)^{١١} + س^٢ (١ + س)^{١١}$

فكرة الحل في $(١ + س)^ن$ معامل $س^ر = {}^{ن}ق_{ر}$

معامل $س^٥ = {}^{١١}ق_{٥} - ١ \times {}^{١١}ق_{٤} + ١ \times {}^{١١}ق_{٣}$

$= {}^{١١}ق_{٥} - {}^{١١}ق_{٤} + {}^{١١}ق_{٣} = ٤٦٢ - ٣٣٠ + ١٦٥ = ٢٩٧$

(٤) اوجد الحد الأوسط من مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٠}$ وإذا كانت قيمة هذا الحد $= \frac{٢٨}{٢٧}$ اوجد قيمة س

الحل: رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$ ∴ $ح_٦ = {}^{١٠}ق_{٥} (س^٢)^٥ (\frac{١}{٢س})^٥$

$\frac{٢٨}{٢٧} = ٢٥٢ \times \frac{١}{٣٢}\, س^٥$ ∴ $س^٥ = \frac{٣٢ \times ٢٨}{٢٥٢ \times ٢٧} = (\frac{٢}{٣})^٥$ ∴ $س = \frac{٢}{٣}$

(٥) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

الحل: $\frac{ح_٨}{ح_٧} = ١$ ∴ $\frac{١٣ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{٢ص}{٣س} = ١$

∴ $\frac{٢ص}{٣س} = ١$ ∴ $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$ او $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ رتبة الأوسطين ٧ ، ٨

(٦) أثبت أن الحد الخالي من س في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س^٣})^{٥ن}$ هو $\frac{\lfloor ٥ن}{\lfloor ٢ن \cdot \lfloor ٣ن}$

الحل: $ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_{ر} (س^٢)^{٥ن - ر} \times (\frac{١}{س^٣})^ر = {}^{٥ن}ق_{ر}\, س^{١٠ن - ٢ر} \times س^{-٣ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر}\, س^{١٠ن - ٥ر}$ ولكي يكون خاليا من س ∴ $١٠ن - ٥ر = ٠$

ومنها $ر = ٢ن$ ∴ الحد الخالي من س هو $ {}^{٥ن}ق_{٢ن} = \frac{\lfloor ٥ن}{\lfloor ٢ن \cdot \lfloor ٣ن}$

(٧) إذا كان $ح_٣ ، ح_٤ ، ح_٥$ في مفكوك $(س + ص)^ن$ هي ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ على الترتيب اوجد قيم ن ، س ، ص

الحل: $\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{٤٤٨}{١١٢}$ ∴ $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = ٤$ ∴ $(ن - ٢)\frac{ص}{س} = ١٢ \leftarrow I$

$\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{١١٢٠}{٤٤٨}$ ∴ $\frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{س} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $(ن - ٣)\frac{ص}{س} = ١٠ \leftarrow II$

بالقسمة $\frac{ن - ٢}{ن - ٣} = \frac{١٢}{١٠}$ ∴ $\frac{ن - ٢}{ن - ٣} = \frac{٦}{٥}$ ∴ $٦ن - ١٨ = ٥ن - ١٠$

∴ $ن = ٨$

بالتعويض في I: $\frac{ص}{س} = ٢$ ∴ $ص = ٢س$

$ح_٣ = ١١٢$ ∴ ${}^{٨}ق_{٢} (س)^٦ . ص^٢ = ١١٢$ ∴ $٢٨ س^٦ \times ٤ س^٢ = ١١٢$

∴ $س^٨ = ١$ ∴ $س = \pm ١$ ومنها $ص = \pm ٢$

(٨) في مفكوك $(١ + س)^٥$ إذا كان $٨ ح_٢ ، ٨ ح_٣ ، ٧ ح_٤$ في تتابع حسابي اوجد قيمة س

الحل: $٢ \times ٨ ح_٣ = ٨ ح_٢ + ٧ ح_٤$ ∴ $١٦ = ٨ \frac{ح_٢}{ح_٣} + ٧ \frac{ح_٤}{ح_٣}$

$١٦ = ٨ \times \frac{٢}{٥ - ٢ + ١} \times \frac{١}{س} + ٧ \times \frac{٥ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{س}{١}$

$١٦ = \frac{٤}{س} + ٧س$ ∴ $١٦س = ٤ + ٧س^٢$ ∴ $٧س^٢ - ١٦س + ٤ = ٠$

$(٧س - ٢)(س - ٢) = $ صفر ومنها $س = \frac{٢}{٧}$ ، $س = ٢$

٩ أوجد معامل الحد الأوسط في مفكوك $(1 + 3س + 3س^2 + س^3)^4$

الحل المفكوك $[(1+س)^3]^4 = (1+س)^{12}$ ∴ الحد الأوسط $= ح_7$

الحد الأوسط $= {}^{12}ق_6 \, س^6$

١٠ في مفكوك $(2س - 3)^{15}$ أوجد قيم س التي تحقق العلاقة

$12 ح_3 + 10 ح_4 + ح_5 =$ صفر

الحل فكرة الحل

$ح_3$ ، $ح_4$ ، $ح_5$ متتالية وعليه استخدام قانون النسبة بين حدين متتاليين

بالقسمة على $ح_4$ ∴ $12 \frac{ح_3}{ح_4} + 10 + \frac{ح_5}{ح_4} =$ صفر

∴ $\cancel{12} \times \frac{3}{\cancel{15-3+1}} \times \frac{2س}{\cancel{-3}} + 10 + \frac{\cancel{15-4+1}}{\cancel{4}} \times \frac{-3}{2س} =$ صفر

$-2س + 10 - \frac{9}{2س} =$ صفر بالضرب × 2س

$-4س^2 + 20س - 9 =$ صفر ∴ $4س^2 - 20س + 9 =$ صفر

∴ $(2س - 1)(2س - 9) =$ صفر ومنها س $\in \{\frac{1}{2} ، \frac{9}{2}\}$

تحويلات على أسس التعليم

أثبت أنه ${}^{ن}ق_1 + (2 \times {}^{ن}ق_2) + (3 \times {}^{ن}ق_3) + (4 \, {}^{ن}ق_4) + \dots + ن \times {}^{ن}ق_ن = ن \times 2^{ن-1}$

الحل حاول بنفسك

الصورة المثلثية للعدد المركب

٢ - ١

Polar form of a complex number

وضح بالرسم

تفكير ناقد: ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقي يساوى ٢ على شكل أرجاند.

ما الذى " " " " ع حيث |ع| = ٢ ، |ع| ≥ ٢

حاول أن تحل

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}$ ت   ب) $ع_2 = -1 - \sqrt{3}$ ت

ج) $ع_3 = -\sqrt{3}$ ت   د) $ع_4 = 5$

تفكير ابداعى: باستخدام الاعداد المركبة اثبت أن $ظا^{-1}(\sqrt{2}) + ظا^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2}$

تفكير ناقد: إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هى θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد $-ع$ ، $\bar{ع}$ ، $\frac{1}{ع}$

إذا كان |ع| = |ع - ١| فإن الجزء الحقيقى للعدد ع هو -----

الحل

cos 2π

حاول أن تحل

(٣) اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى الصورة المثلثية:

أ) $ع_1 = 8$ ب) $ع_2 = 5$ت   ج) $ع_3 = -3 - 3$ت

حاول أن تحل

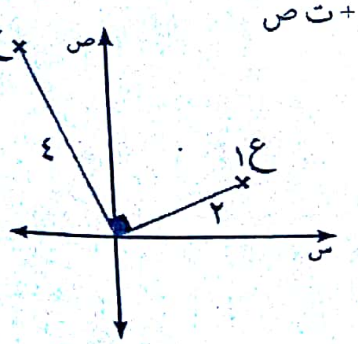
(٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1 = 2(جتا \frac{\pi}{3} - ت\ جا \frac{\pi}{3})$ ب) $ع_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(جا 45^\circ - ت\ جا 45^\circ)$

حاول أن تحل

(٥) عبر عن $2(جتا \frac{\pi}{15} + ت\ جا \frac{\pi}{15}) \times 3(جتا \frac{-2\pi}{5} + ت\ جا \frac{-2\pi}{5})$ بالصورة س + ت ص

حاول أن تحل



(٦) باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$ على الصورة س + ص ت

(٧) إذا كان $ع_1 = 2(جتا 10^\circ + ت\ جا 10^\circ)$ ، $ع_2 = 3(جتا 40^\circ + ت\ جا 40^\circ)$

أوجد: العدد $ع_1^4\ ع_2^3$ على الصورة س + ص ت

(٨) اكتب الصورة الأسية للعدد $ع = 2\sqrt{3}ت \div (1 + ت)$

(٩) إذا كان $ع_1 = 1 - \sqrt{3}$ ت ، $ع_2 = 1 + $ت اوجد كلا مما يأتى فى الصورة الأسية

أ) $ع_1 . ع_2$ ب) $ع_2 \div ع_1$ ج) $(ع_2)^6$

(١٠) تفكير ابداعى: أثبت أن $جتا \theta = \frac{1}{2}(هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت})$ ، $جا \theta = \frac{-ت}{2}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت})$

(١١) إذا كان ع$_1$ = ٢ [جا $\frac{\pi}{3}$ + ت جتا $\frac{\pi}{3}$] ، ع$_2$ = $\sqrt{2}$ [جا $\frac{\pi}{4}$ − ت جتا $\frac{\pi}{4}$]
ع$_3$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت أوجد العدد ع = ع$_1^3$. ع$_2^4$ ÷ ع$_3^5$
على الصورة الأسية ثم أوجد الجذرين التربيعيين في الصورة المثلثية

الحل

ع$_1$ = ٢ [جتا (٩٠ − ٦٠) + ت جا (٩٠ − ٦٠)] = ٢ [جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]

∴ ع$_1^3$ = ٨ [جتا ٩٠ + ت جا ٩٠] = ٨ ت = ٨ هـ$^{\frac{\pi}{2} ت}$

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ [جتا (−٩٠ + ٤٥) + ت جا (−٩٠ + ٤٥)] = $\sqrt{2}$ [جتا (−٤٥) + ت جا (−٤٥)]

ع$_2^4$ = ٤ [جتا (−١٨٠) + ت جا (−١٨٠)] = ٤ [جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠] = −٤
بإضافة ٣٦٠
= ٤ هـ$^{\pi ت}$

ع$_3$ = ٢ [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠] = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{3} ت}$

∴ ع$_3^5$ = 2^5 × [جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠]

∴ ع$_3^5$ = ٣٢ [جتا (−٦٠) + ت جا (−٦٠)] = ٣٢ هـ$^{-\frac{\pi}{3} ت}$

ع = ع$_1^3$. ع$_2^4$ ÷ ع$_3^5$ = $\dfrac{\text{٨ هـ}^{\frac{\pi}{2} ت} \times \text{٤ هـ}^{\pi ت}}{\text{٣٢ هـ}^{-\frac{\pi}{3} ت}}$ = هـ$^{\frac{11\pi}{6} ت}$

ع = هـ$^{(-2\pi + \frac{11\pi}{6}) ت}$

∴ ع = هـ$^{-\frac{\pi}{6} ت}$

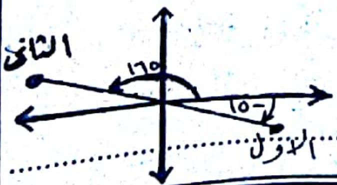
ع = هـ$^{-\frac{\pi}{6} ت}$ = جتا (−٣٠) + ت جا (−٣٠)

ع$^{\frac{1}{2}}$ = جتا $\left(\frac{-30 + 360 ن}{2}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-30 + 360 ن}{2}\right)$

بوضع ن = صفر ، ١

∴ الجذر الأول = جتا (−١٥) + ت جا (−١٥) = هـ$^{-\frac{\pi}{12} ت}$

الجذر الثاني = جتا ١٦٥ + ت جا ١٦٥ = هـ$^{\frac{11\pi}{12} ت}$



نجد بالرسم أن الجذرين ونقطة الأصل مستقيمة

(١٢) ضع العدد $ع = \frac{١٦}{١ + \sqrt{٣}\,ت}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع في صورة أويلر

الحل

$ع = \frac{١٦\,هـ^{٠ ت}}{٢\,هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}} = ٨\,هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

س = ١ ، ص = $\sqrt{٣}$ ∴ ل = ٢

ظا θ = $\sqrt{٣}$ ∴ θ = ٦٠°

لاحظ أن العدد ع في الربع الأول

$ع^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٨}\,هـ^{\frac{١}{٣}(٢ر\pi - \frac{\pi}{٣})ت}$ بوضع ر = ٠ ، ١ ، −١

∴ الجذر الأول = $٢\,هـ^{-\frac{\pi}{٩}ت}$ ، الثاني = $٢\,هـ^{\frac{٥\pi}{٩}ت}$ ، الثالث = $٢\,هـ^{-\frac{٧\pi}{٩}ت}$

(١٣) أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٣}}$

الحل

بالنسبة للعدد $\sqrt{٣} + ت$ ∴ المقياس = ٢ ، السعة = ٣٠°

∴ صورته المثلثية ٢ [جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]

∴ $ع^{\frac{٢}{٣}} = [ع^٢]^{\frac{١}{٣}} = [٤ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)]^{\frac{١}{٣}}$

$= \sqrt[٣]{٤}\,هـ^{\frac{١}{٣}(٢ر\pi + \frac{\pi}{٣})ت}$ بوضع ر = ٠ ، ١ ، −١

∴ القيم $\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{\frac{\pi}{٩}ت}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{\frac{٧\pi}{٩}ت}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\,هـ^{-\frac{٥\pi}{٩}ت}$

(١٤) أوجد $\sqrt{٧ - ٢٤ ت}$ بدون استخدام نظرية حوافر

الحل

نفرض أن $\sqrt{٧ - ٢٤ ت} = س + ص ت$

∴ $س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت = ٧ - ٢٤ ت$ بمساواة الحقيقي والتخيلي

$س^٢ - ص^٢ = ٧$ ، $٢ س ص = -٢٤$ خذ بالك أن $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

بالحل ∴ س = ± ٤ ، ص = ± ٢

∵ س ص < ٠

∴ س ، ص مختلفين في الإشارة ∴ الجذران ٤ − ٢ ت ، −٤ + ٢ ت

(١٥) أوجد $\overline{(٣ + \omega^٢)}$ ، $\overline{(ت + \omega)}$ ، $\overline{٣}$

الحل

$٣ + \omega^٢$ مرافقه $٣ + \omega$ ، $ت + \omega$ مرافقه $-ت + \omega^٢$ ، $\overline{٣} = ٣$

(١٦) إذا كان $(١ + \omega^٢)^{١١} = أ + ب\,\omega$ فإن أ + ب = ----

الحل

$(-\omega)^{١١} = -\omega^٤ = ١ + \omega$ ∴ أ = ١ ، ب = ١ ∴ أ + ب = ٢

(١٧) حل المعادلة فى ك حيث $س^٣ = ٨$ ثم اوجد مجموع جذورها

الحل $س^٣ = ٨ هـ^{ت ٠} = ٨ هـ^{٢ن ط ت}$

∴ $س = ٢ ، ٢ω ، ٢ω^٢$ ∴ مجموعها = صفر ، حاصل ضربها = ٨

(١٨) اوجد مجموع جذور المعادلة $(ع - ٥)^٣ = ١$

الحل $(ع - ٥)^٣ = جتا ٠ + ت جا ٠ = جتا (٢ن ط) + ت جا (٢ن ط)$

$ع - ٥ = جتا \frac{٢ن ط}{٣} + ت جا \frac{٢ن ط}{٣} = ١ ، ω ، ω^٢$

∴ $ع = ٥ + ١$ ، $ع = ٥ + ω$ ، $ع = ٥ + ω^٢$ ∴ مجموعها = ١٥

(١٩) اوجد المعادلة التربيعية التى جذراها $\frac{١}{١ + ω}$ ، $\frac{١}{١ + ω^٢}$

الحل الجذر الاول = $\frac{١}{-ω^٢} = -ω$ ، الجذر الثانى = $\frac{١}{-ω} = -ω^٢$

مجموع الجذرين = $-ω - ω^٢ = ١$ ، حاصل ضربهما = ١

المعادلة هى $س^٢ - س + ١ = صفر$

(٢٠) اوجد قيمة $(١ - \frac{١}{ω})(١ - \frac{١}{ω^٢})(١ - \frac{١}{ω^٤})(١ - \frac{١}{ω^٨})$ إلى ١٢ عامل

الحل المقدار = $(١ - ω^٢)(١ - ω)(١ - ω^٢)(١ - ω) .....$ إلى ١٢ عامل

$= (١ - ω^٢)^٦ (١ - ω)^٦ = [(١ - ω^٢)^٢]^٣ \times [(١ - ω)^٢]^٣$

$= (-٢ω)^٣ \times (-٣ω^٢)^٣ = (٩)^٣ = ٧٢٩$

(٢١) اثبت انه مهما كانت قيم أ ، ب ، جـ ، د فإن $\left(\frac{أ - ب ω^٢}{أ ω - ب} - \frac{جـ - د ω}{جـ ω^٢ - د}\right)^٤ = ٩$

الحل $\left(\frac{أ ω^٣ - ب ω^٢}{أ ω - ب} - \frac{جـ ω^٣ - د ω}{جـ ω^٢ - د}\right)^٤$

$= \left[\frac{ω^٢ \cancel{[أ ω - ب]}}{\cancel{[أ ω - ب]}} - \frac{ω \cancel{[جـ ω^٢ - د]}}{\cancel{[جـ ω^٢ - د]}}\right]^٤$

$= (ω^٢ - ω)^٤$

$= (\pm \sqrt{٣} ت)^٤ = ٩$

∴ لا يعتمد على أ ، ب ، جـ ، د

أولا المحددات

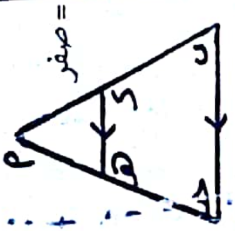
حاول أن تحل

(١) أثبت أن $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$

حاول أن تحل

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٢ \\ -١ & ٧ & -١ \end{vmatrix} =$ صفر

(٣) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل $\overline{ب جـ} // \overline{د هـ}$ أثبت أن $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \overline{أهـ} & \overline{أد} & دهـ \\ \overline{أجـ} & \overline{أب} & ب جـ \end{vmatrix} =$ صفر



حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} م & د & أ \\ ن & هـ & ب \\ ع & و & جـ \end{vmatrix} = ١٠$ أوجد فيه $\begin{vmatrix} ٢م & ٢د & ٢أ \\ ن & هـ & ب \\ -٤ع & -٤و & -٤جـ \end{vmatrix}$

حاول أن تحل

(٥) أوجد المحدد م = م$_١$ + م$_٢$ + م$_٣$ حيث

م$_١$ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ ، م$_٢$ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ ، م$_٣$ = $\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

حاول أن تحل

(٦) بدون فك المحدد أوجد قيمة $\begin{vmatrix} -٧ & ٥ & ٢ \\ ٤ & -١ & -٣ \\ -٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$

(٨) بدون فك المحددات اثبت ان $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ جـ & أ & ب \\ أ & جـ & ب \end{vmatrix} = (جـ+ب+أ)(جـ-أ)(ب-أ)$

حاول أن تحل

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ٢جـ & ٢ب & أ-ب-جـ \\ ٢جـ & ب-جـ-أ & ٢أ \\ جـ-أ-ب & ٢ب & ٢أ \end{vmatrix} = (أ+ب+جـ)^٣$

(٩) بدون فك اثبت ان $\begin{vmatrix} أ^٢ & أ^٢ & ب جـ \\ ب^٢ & جـ أ & ب^٢ \\ أ ب & جـ^٢ & جـ^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} جـ أ & أ ب & ب جـ \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \\ أ ب & ب جـ & أ جـ \end{vmatrix}$

(١٠) اوجد قيمة ك التي تجعل س من عامل من عوامل المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & س+١ \\ ٣ & ٢ & ك \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix}$

اجابة المحددات

(١) بتدوير المحدد الاول نحصل على الثاني

(٢) ∵ $ع_٢ = ع_١$ ∴ $\Delta =$ صفر

(٣) بأخذ ٢ مشترك من $ص_١$ ، -٤ من $ص_٣$

∴ المحدد المطلوب $= ٢ \times -٤ \begin{vmatrix} ٣ & د & أ \\ م & هـ & ب \\ ع & و & جـ \end{vmatrix} = -٨ \times ١٠ = -٨٠$

(٤) ∵ $\overline{ده} \parallel \overline{بجـ}$ ∴ Δ أده ~ Δ أبجـ ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ده}{بجـ}$

نفرض ان كل نسبة = ل ∴ أد = ل . أب ، أهـ = ل . أجـ ، ده = ل . بجـ

بالتعويض في المحدد نجد أن $ص_١ = ل\, ص_٢$ ∴ $\Delta =$ صفر

(٥)
$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -١ & ٤ & صفر \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

∴ $م_١ + م_٢ + م_٣ =$
$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ صفر & ٤ & -١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٤ & ١ & ٥ \\ صفر & ١ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٤ & ٥ \\ صفر & ٥ & -١ \end{vmatrix}$$

(٦) $ص_٢ = -ص_٣$ ∴ قيمة المحدد = صفر

(٧) $ع_٢ + ع_١$ ثم $ع_٣ + ع_١$ أو $(ع_٢ + ع_٣) + ع_١$ ثم (أ+ب+جـ) مشترك من $ع_١$

$$(أ+ب+جـ) \begin{vmatrix} ١ & ٢ب & ٢جـ \\ ١ & ب-جـ-أ & ٢جـ \\ ١ & ٢ب & جـ-أ-ب \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} ص_٢ - ص_١ \\ ص_٣ - ص_١ \end{matrix}$$

$$= (أ+ب+جـ) \begin{vmatrix} ١ & ٢ب & ٢جـ \\ صفر & -(أ+ب+جـ) & صفر \\ صفر & صفر & -(أ+ب+جـ) \end{vmatrix}$$

$$= (أ+ب+جـ) \times ١ \times -(أ+ب+جـ) \times -(أ+ب+جـ) = (أ+ب+جـ)^٣$$

(٨) (ع١ + ع٢ + ع٣) + ع١ ثم (أ + ب + جـ) مشترك من ع١

∴ $\Delta = (أ + ب + جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب & 1 \\ جـ & أ & 1 \\ أ & جـ & 1 \end{vmatrix}$ ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١

$\Delta = (أ + ب + جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب & 1 \\ صفر & أ - ب & صفر \\ أ - جـ & جـ - أ & صفر \end{vmatrix}$ ع٢ + ع٣

$= (أ + ب + جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب + جـ & 1 \\ صفر & أ - ب & صفر \\ أ - جـ & صفر & صفر \end{vmatrix} = (أ + ب + جـ)(أ - جـ)(أ - ب)$

(٩) بضرب ع١ × أ ، ع٢ × ب ، ع٣ × جـ وخارج المحدد × $\frac{1}{أ.ب.جـ}$

$\Delta = \frac{1}{أ.ب.جـ}\begin{vmatrix} أ^2جـ & أ^2ب & أبجـ \\ ب^2جـ & أبجـ & أب^2 \\ أبجـ & بجـ^2 & أجـ^2 \end{vmatrix}$

بأخذ أ مشترك من ص١
ب — — ص٢
جـ — — ص٣

$= \frac{أ.ب.جـ}{أ.ب.جـ}\begin{vmatrix} أجـ & أب & بجـ \\ بجـ & أجـ & أب \\ أب & بجـ & أجـ \end{vmatrix} =$ الأيسر

(١٠) ∴ س أحد العوامل ∴ س = صفر تجعل Δ = صفر

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & ك \\ 1 & 2 & صفر \end{vmatrix} =$ ٠ ∴ ص٢ − ك ص١

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 - ك & 2 - 3ك & صفر \\ 1 & 2 & صفر \end{vmatrix} =$ ٠ ∴ ع٢ − ٢ع٣

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 - ك & 2 - 3ك - 6 + 2ك & صفر \\ 1 & صفر & صفر \end{vmatrix} =$ صفر

∴ −٤ − ك = صفر

∴ $\boxed{ك = -4}$

ثانياً المصفوفات

حاول أن تحل

(١) أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى.

حاول أن تحل

(٢) حدد هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ معكوس ضربى؟

حاول أن تحل

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

مثال

(٤) أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

الحل

نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 15 & 2 & -10 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore ب^{مل} = \begin{pmatrix} 7 & 15 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

(٥) اوجد رتبة كل من س ، ص

$$س = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ص = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

تفكير ناقد من المثال السابق أوجد قيمة كل من: ب $ب^{مل}$ ، $ب^{مل}$ ب ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

(٦) أوجد المعكوس الضربى لكل المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٧) فى المثال السابق تحقق من الخواص الآتية:

أولاً: $(أ^{-1})^{مد} = (أ^{مد})^{-1}$ ثانيًا: $(أ^{-1})^{2} = (أ^{2})^{-1}$

تفكير إبداعى: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ فأثبت أن $أ^2 - 7أ - 18I = \boxed{}$ ومن ذلك أوجد $أ^{-1}$

(٨) تفكير ناقد
اوجد قيمة ك إذا كان ر(أ) = ٢ حيث
$$أ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ ك & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(٩) إذا كان ر(ب) = ٣ أوجد قيمة ك ∈ ح حيث
$$ب = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & ك & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(١٠) بين أن النظام ٢س + ص − ع = صفر ، س − ص + ٢ع = ٠ ، س − ع = ٠ له حلا صفريا فقط

(١١) بين أن النظام ٢س + ٣ص + ٥ع = صفر ، ٧س + ٤ص − ٢ع = صفر ، ٦س + ٩ص + ١٥ع = صفر له عدد لا نهائي من الحلول واكتب صورة الحل واستنتج أحد الحلول

(١٢) اوجد قيمة س التى تجعل المصفوفات الآتية منفردة
$$أ = \begin{pmatrix} س-2 & 2 \\ 7 & س+2 \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2س & 2س & س+1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

تمرينات على الوحدة الأولى

س١ : بعد النقطة (٣ ، -١ ، ٢) عن المستوى س ع = ...

الحل : بعد النقطة عن المستوى س ع = |ص| = |-١| = $\boxed{١}$

س٢ : طول العمود المرسوم من (-٢ ، ٣ ، ٤) على محور س = ...

الحل : طول العمود المرسوم من نقطة على محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$

∴ طول العمود = $\sqrt{٣^2 + ٤^2}$ = $\boxed{٥}$ وحدة طول

س٣ : اذا كانت جـ (٢ ، ٢ ، ٦) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، -٤ ، ٠) فإن ب = ...

الحل :

ب (س ، ص ، ع) ——— جـ (٢ ، ٢ ، ٦) ——— أ (١ ، -٤ ، ٠)

(٢ ، ٢ ، ٦) = $\left(\frac{١ + س}{٢} ، \frac{-٤ + ص}{٢} ، \frac{٠ + ع}{٢} \right)$

∴ ب = (٣ ، ٨ ، ١٢)

س٤ : اذا كان $\vec{أ}$ = (٤ ، -ك ، ٦) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، ٢ ، م) وكان $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ فإن ك + م = ...

الحل : ∵ $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ ∴ $\frac{س_1}{س_2} = \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ع_1}{ع_2}$ = ك

∴ $\frac{٤}{٢} = \frac{-ك}{٢} = \frac{م}{٦}$ ومنها ك = -٤ ، م = ١٢

∴ م + ك = ١٢ + (-٤) = $\boxed{٨}$

س٥ : اذا كان $\vec{أ}$ = (-٣ ، ١ ، ٢) ، $\vec{ب}$ = (٣ ، ٤ ، -١) فإن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران = ...

الحل : مساحة ▱ = $\| \vec{أ} \times \vec{ب} \|$

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ -٣ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$ = -٩ $\hat{س}$ + ٣ $\hat{ص}$ - ١٥ $\hat{ع}$

∴ مساحة ▱ = $\sqrt{(-٩)^2 + (٣)^2 + (-١٥)^2}$ = $٣\sqrt{٣٥}$ وحدة مربعة

س٦: أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة تمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ} = (١، -١، ٢)$، $\overrightarrow{ب} = (٣، -٢، ٠)$، $\overrightarrow{جـ} = (٠، ٢، ٤)$

الحل: حجم متوازي السطوح = $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

$$\text{مقياس} \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١(-٨) + ١(١٢) + ٢(٦)$$

$$= |-٨ + ١٢ + ١٢| = |١٦|$$

= ١٦ وحدة مكعبة

س٧: أوجد المركبة الاتجاهية لمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ(٢، ١، ٠)، ب(٣، ١، $\sqrt{٣}$) في اتجاه $\overrightarrow{م} = (٣، ٢، ٢\sqrt{٣})$

الحل: $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (١، ٠، \sqrt{٣})$

المركبة الاتجاهية لمتجه $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{م}$ هي $\dfrac{\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|} \cdot \overrightarrow{ى}_م$

$$= \frac{(١، ٠، \sqrt{٣}) \cdot (٣، ٢، ٢\sqrt{٣})}{\sqrt{٩+٤+١٢}} \cdot \frac{(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})}{\sqrt{٩+٤+١٢}}$$

$$= \frac{٣ + \text{صفر} + ٦}{٥} \cdot \frac{(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})}{٥} = \frac{٩}{٢٥}(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})$$

$$= \left(\frac{٢٧}{٢٥}، \frac{١٨}{٢٥}، \frac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$$

س٨: إذا كان $\overrightarrow{أ} = (ل، -٣، ١)$، $\overrightarrow{ب} = (٢، ٣، -ل)$ متعامدين فأوجد ل =

الحل: ∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ صفر

∴ $(ل، -٣، ١) \cdot (٢، ٣، -ل) =$ صفر

$٢ل - ٩ - ل = ٠$

∴ ل = ٩

س١٤: أوجد معادلة الكرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٧، ١، −٤)، ب(٣، −١، ٢).

الحل: م مركز الكرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ م(٥، ٠، −١)

نق = م أ = $\sqrt{}$(٧ − ٥)^2 + (١ − ٠)^2 + (−٤ + ١)^2 = $\sqrt{١٤}$

∴ معادلة الكرة هي (س − ٥)^2 + (ص − ٠)^2 + (ع + ١)^2 = ١٤

الصورة العامة هي س^2 + ص^2 + ع^2 − ١٠س + ٢ع + ١٢ = ٠

س١٥: إذا كانت النقطة (−٢، ٤، م) تقع على الكرة (س + ٢)^2 + (ص − ١)^2 + (ع − ٣)^2 = ٢٥ فأوجد قيم م.

الحل: ∵ النقطة (−٢، ٤، م) تقع على الكرة ∴ تحقق معادلتها

∴ (~~−٢~~ + ٢)^2 + (٤ − ١)^2 + (م − ٣)^2 = ٢٥

٩ + (م − ٣)^2 = ٢٥ ∴ (م − ٣)^2 = ١٦

∴ م − ٣ = ± ٤ ∴ م = ٧ أو م = −١

س١٦: إذا قطع محور السينات الكرة التي مركزها (٣، −٤، ١٢) ونصف قطرها ١٣ سم في النقطتين أ، ب فإن طول $\overline{\text{أب}}$ = ... وحدة

الحل:

∵ معادلة الدائرة (س − ل)^2 + (ص − ك)^2 + (ع − ن)^2 = نق^2

∴ (س − ٣)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع − ١٢)^2 = ١٦٩

∵ محور السينات يقطع الكرة ∴ النقطة (س، ٠، ٠) تحقق معادلة الكرة

∴ (س − ٣)^2 + (٠ + ٤)^2 + (٠ − ١٢)^2 = ١٦٩

∴ (س − ٣)^2 + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (س − ٣)^2 = ٩ بالجذر

|س − ٣| = ٣

س − ٣ = ٣ | س − ٣ = −٣

س = ٦ | س = ٠

∴ أ(٦، ٠، ٠)

ب(٠، ٠، ٠)

∴ طول $\overline{\text{أب}}$ = ٦ وحدة طول

س٩: إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-\frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، ك)$ متجه وحدة فإن ك = ...

الحل:

∵ $\overrightarrow{أ}$ متجه وحدة ∴ $س^2 + ص^2 + ع^2 = 1$

∴ $(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{4})^2 + ك^2 = 1$ ∴ $ك^2 = \frac{3}{16}$

∴ $ك = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

س١٠: إذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = 4$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = 6$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن $(2\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = ...$

الحل: $(2\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = 2\|\overrightarrow{أ}\|^2 - \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} - \|\overrightarrow{ب}\|^2$

$= 2 \times 16 - (\|\overrightarrow{أ}\| \cdot \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جتا } \theta) - 36$

$= 32 - 4 \times 6 \times \text{جتا } 60 - 36 = \boxed{-16}$

س١١: قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ} = (3 ، 4 ، \sqrt{11})$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي ...

الحل:

∵ $\text{جتا } \theta_{س} = \frac{أ_س}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{3}{\sqrt{9+16+11}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∴ $\theta = 60°$

س١٢: أوجد قياس الزاوية بين المتجهين

$\overrightarrow{أ} = 5\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - 2\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

الحل: ∵ $\text{جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \cdot \|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(5 ، 1 ، -2) \cdot (1 ، 1 ، -1)}{\sqrt{25+1+4} \sqrt{1+1+1}}$

$\text{جتا } \theta = \frac{5+1+2}{\sqrt{30} \times \sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{30} \times \sqrt{3}}$ ∴ $\theta = 32° \; 31'$

س١٣: أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2س - 2ص - 4ع - 3 = \text{صفر}$

الحل: م $= (-\frac{1}{2} \text{ معامل س} ، -\frac{1}{2} \text{ معامل ص} ، -\frac{1}{2} \text{ معامل ع}) = (-1 ، 1 ، 2)$

نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د} = \sqrt{1+1+4-(-3)} = \sqrt{9} = 3$ وحدة طول

تمرينات على الوحدة الثانية

س١: اثبت أن المستقيمين $\vec{ر}_1 = (٣، -٣، ٥) + ك_1(٠، -٥، ٥)$

$\vec{ر}_2 = (-٢، ٣، ١) + ك_2(٥، -١، -١)$

متعامدان ومتقاطعان ثم أوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما

الحل: ∵ $\vec{ه}_1 = (٠، -٥، ٥)$ ، $\vec{ه}_2 = (٥، -١، -١)$

∵ $\vec{ه}_1 \cdot \vec{ه}_2 =$ صفر $+ ٥ - ٥ =$ صفر ∴ المستقيمان متعامدان

لإثبات أنهما متقاطعان: نبحث عن قيم لـ $ك_1$ ، $ك_2$ تجعل $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

$٣ +$ صفر $ك_1 = -٢ + ٥ك_2 \Leftarrow ٥ك_2 = ٥ \Leftarrow ك_2 = ١$ (١)

$-٣ - ٥ك_1 = ٣ - ك_2 \Leftarrow ٥ك_1 - ك_2 = -٦ \Leftarrow ك_1 = -١$ (١-)

بالتعويض في $٥ + ٥ك_1 = ١ - ك_2$

∴ $٥ + ٥(-١) =$ صفر ، $١ - ١ =$ صفر

∴ المستقيمان متقاطعان ∴ نقطة التقاطع $\vec{ر}_1 = (٣، -٣، ٥) + (-١)(٠، -٥، ٥)$

∴ نقطة التقاطع هي $(٣، ٢، ٠)$

س٢: اثبت أن المستقيمين $\vec{ر}_1 = (٣، -١، ٢) + ك_1(٤، ١، ٣)$ ،

$\vec{ر}_2 = (٠، ٤، -١) + ك_2(١، -١، ٢)$ متخالفان

الحل: $\vec{ه}_1 = (٤، ١، ٣)$ ، $\vec{ه}_2 = (١، -١، ٢)$

∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١} \neq \frac{٣}{٢}$ ∴ $\vec{ر}_1$ لا يوازي $\vec{ر}_2$

لإثبات أنهما متخالفان نثبت أنهما غير متقاطعين

بمساواة المعادلات

$٣ + ٤ك_1 =$ صفر $+ ك_2 \Leftarrow ٤ك_1 - ك_2 = -٣$ (١)

$-١ + ك_1 = ٤ - ك_2 \Leftarrow ك_1 + ك_2 = ٥$ (٢)

$٢ + ٣ك_1 = -١ + ٢ك_2 \Leftarrow ٣ك_1 - ٢ك_2 = -٣$ (٣)

بحل (١)، (٢) ينتج أن $ك_1 = \frac{٢}{٥}$ ، $ك_2 = \frac{٢٣}{٥}$

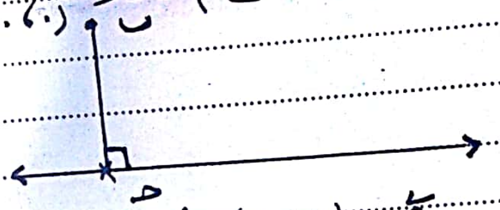
بالتعويض في (٣) لا تتحقق ∴ لا توجد قيم لـ $ك_1$ ، $ك_2$ تحقق المعادلات

∴ المستقيمان غير متقاطعين وغير متوازيين

∴ المستقيمان متخالفان

س٣: أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم
ر = (٣، ١، ٤) + ك (٢، ١، ٣) على التعامد

الحل:



متجه اتجاه المستقيم المعلوم $\vec{ر}$ هو $\vec{ي}$

$\vec{ي}$ = (٢، ١، ٣)

نفرض أن نقطة التقاطع هي جـ (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

ب (٠، ٠، ٠) ∈ المستقيم المطلوب

∴ $\vec{ي_٢}$ = $\vec{ب جـ}$ = جـ − ب = (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

∵ $\vec{ي}$ ، $\vec{ي_٢}$ متعامدين

∴ ٦ + ٤ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ك = صفر

١٤ك = −١٩ ∴ ك = $\frac{-١٩}{١٤}$

∴ $\vec{ي_٢}$ = ($\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-٥}{١٤}$ ، $\frac{-١}{١٤}$) وعليه تبسيط $\vec{ي_٢}$ بالضرب × ١٤

∴ $\vec{ي}$ = (٤ ، −٥ ، −١)

∴ معادلة المستقيم هي $\vec{ر}$ = ل (٤ ، −٥ ، −١)

أو $\frac{س}{٤}$ = $\frac{ص}{-٥}$ = $\frac{ع}{-١}$

س٤: اثبت أن المستقيمين ل١: ٢س = ٣ص = ٤ع ، ل٢: ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذي يحتويهما

الحل: ل١: ٢س = ٣ص = ٤ع بالقسمة ÷ ١٢ ∴ $\frac{س}{٦}$ = $\frac{ص}{٤}$ = $\frac{ع}{٣}$

يمر بنقطة الأصل ، $\vec{ي_١}$ = (٦ ، ٤ ، ٣)

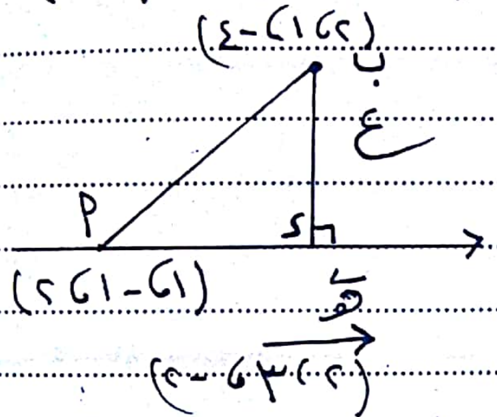
ل٢ بالقسمة ÷ ٣٠ ∴ $\frac{س}{١٠}$ = $\frac{ص}{١٥}$ = $\frac{ع}{٦}$ يمر بنقطة الأصل ، $\vec{ي_٢}$ = (١٠ ، ١٥ ، ٦)

∴ المستقيمين متقاطعين في نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) لإيجاد معادلة المستوى الذي يحتويهما

نفرض $\vec{ن}$ = $\vec{ي_١}$ × $\vec{ي_٢}$ =
$$\begin{vmatrix} \vec{س}^{+} & \vec{ص}^{-} & \vec{ع}^{+} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix} = (-٢١ ، -٦ ، ٥٠)$$

∴ معادلة المستوى $\vec{ن}$. $\vec{ر}$ = $\vec{ن}$. $\vec{أ}$ ∴ −٢١س − ٦ص + ٥٠ع = صفر

س٥: أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب (٢، ١، -٤) على المستقيم ر = (١، -١، ٢) + ك (٢، ٣، -٢)



الحل:

أب = ب - أ = (١، ٢، -٦)

مسقط أب في اتجاه هـ = أء

أء = (أب · هـ) / ||هـ||

= (١، ٢، -٦) · (٢، ٣، -٢) / √(٤ + ٩ + ٤)

أء = (٢ + ٦ + ١٢) / √١٧ = ٢٠ / √١٧

∴ طول العمود ع = √((أب)² - (أء)²)

أب = √(١ + ٤ + ٣٦) = √٤١

= √(٤١ - ٤٠٠/١٧) ≈ ٤,١٨

حل آخر:

طول العمود ع = ||أب × هـ|| / ||هـ|| = √((١٤)² + (-١٠)² + (-١)²) / √(٤ + ٩ + ٤) ≈ ٤,١٨

أب × هـ = | س ص ع ؛ ١ ٢ -٦ ؛ ٢ ٣ -٢ | = (١٤، -١٠، -١)

س٦: أوجد نقط تقاطع المستقيم ر = (١، ٤، ٢) + ك (٣، ٢، ٢) مع المستوى (٣، ٢، ٢) · ر = -٢

الحل: نفرض أن نقطة التقاطع هي ر = (١ + ٣ك، ٤ + ٢ك، ٢ + ٢ك)

∵ تنتمي للمستوى

∴ (٣، ٢، ٢) · (١ + ٣ك، ٤ + ٢ك، ٢ + ٢ك) = -٢

∴ ٣ + ٩ك + ٨ + ٤ك + ٤ + ٤ك = -٢ ومنها ك = -١

∴ نقطة التقاطع هي (١ + ٣ × (-١)، ٤ + ٢ × (-١)، ٢ + ٢ × (-١))

= (-٢، ٢، صفر)

س٧ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ١، ٤) على المستوى الذي معادلته $\overline{ر} \cdot (١، -٣، ٢) = ٤$

الحل: (س١، ص١، ع١) = (-٢، ١، ٤)

معادلة المستوى (الإحداثية) هي س - ٣ص + ٢ع - ٤ = ٠

∴ طول العمود ل = $\dfrac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

∴ ل = $\dfrac{|١×(-٢) + (-٣)×١ + ٢×٤ + (-٤)|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤}} = \dfrac{١}{\sqrt{١٤}}$ وحدة طول

س٨: أوجد معادلة المستوى العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣، ٤)، (٤، ٥، ٨) عند منتصفه.

الحل:

نفرض أن أ(٢، ٣، ٤) ، ب(٤، ٥، ٨)

متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هو $\overline{هـ} = \overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (٢، ٢، ٤)$

وهو العمودي على المستوى المطلوب أي أن ن

$\overline{ن}$ = (٢، ٢، ٤) أي بالقسمة على ٢

$\overline{ن}$ = (١، ١، ٢)

نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي (٣، ٤، ٦)

∴ معادلة المستوى $\overline{ن} \cdot \overline{ر} = \overline{ن} \cdot (٣، ٤، ٦)$

(١، ١، ٢) . (س، ص، ع) = (١، ١، ٢) . (٣، ٤، ٦)

س + ص + ٢ع = ٣ + ٤ + ١٢

س + ص + ٢ع - ١٩ = صفر

س٩: مستقيم يمر بنقطة الأصل وجيوب تمام اتجاهه هي $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-٣}{٧}$ ، $\frac{٦}{٧}$ ويقطع المستوى ٣س + ٥ص + ٢ع = -٦ في ب ، أوجد طول $\overline{و ب}$

الحل: معادلة المستقيم $\overline{ر}$ = ك (٢، -٣، ٦) كنقطة المستوى

∴ ٣×٢ك + ٥×-٣ك + ٢×٦ك = -٦ ، ومنها ك = -٢

ب (-٤، ٦، -١٢) ∴ و ب = $\sqrt{١٦ + ٣٦ + ١٤٤}$ = ١٤ وحدة طول

س١١: أوجد الصورة الإحداثية لمعادلة المستوى

$(س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + ل_١ (-١، ٣، ٤) + ل_٢ (٦، ١، -٢)$

الحل: حيث $ل_١، ل_٢$ بارامترات

المستوى يمر بالنقطة $(٢، ٣، ٥)$ ولتكن أ

$\overrightarrow{ه_١} = (-١، ٣، ٤)$ ، $\overrightarrow{ه_٢} = (٦، ١، -٢)$ متجهي اتجاه

للمستوى متعامدان على ن

أي إن $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ه_١} \times \overrightarrow{ه_٢} =$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{ن} = (-١٠، ٢٢، -١٩)$

معادلة المستوى $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(-١٠، ٢٢، -١٩) \cdot (س، ص، ع) = (-١٠، ٢٢، -١٩) \cdot (٢، ٣، ٥)$

$-١٠ س + ٢٢ ص - ١٩ ع = -٢٠ + ٦٦ - ٩٥$

$-١٠ س + ٢٢ ص - ١٩ ع + ٤٩ =$ صفر

س١١ أوجد بعد النقطة $(-١، ١، -٢)$ عن المستوى المار بالنقاط $(١، -١، ١)$ ، $(-٢، ١، ٣)$ ، $(٤، -٥، -٢)$

الحل: نفرض أن النقط هي أ، ب، جـ على الترتيب

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = (-٣، ٢، ٢) \times (٣، -٤، -٣)$

$$\overrightarrow{ن} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ & -٣ \end{vmatrix} = (٢، -٣، ٦)$$

معادلة المستوى $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ ، $٢س - ٣ص + ٦ع = (٢، -٣، ٦) \cdot (١، -١، ١)$

$٢س - ٣ص + ٦ع = ١١$

$$طول العمود = \frac{|٢ \times (-١) + (-٣) \times ١ + ٦ \times (-٢) - ١١|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}} = \frac{٢٨}{٧}$$

$= ٤$ وحدة طول

س١٢: اوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ٣ص - ٢ع = ١ ،

٢س + ص - ٣ع = ٥

الحل: س + ٣ص - ٢ع = ١ (١)

٢س + ص - ٣ع = ٥ (٢)

بضرب معادلة الأولى × -٢ والجمع

∴ ~~-٢س~~ - ٦ص + ٤ع = -٢ بالجمع

~~٢س~~ + ص - ٣ع = ٥

-٥ص + ع = ٣ ⟸ ع = ٣ + ٥ص

بضرب معادلة ٢ × (-٣) والجمع

∴ س + ~~٣ص~~ - ٢ع = ١ بالجمع

-٦س - ~~٣ص~~ + ٩ع = -١٥

-٥س + ٧ع = -١٤ ⟸ ع = $\frac{٥س - ١٤}{٧}$

∴ معادلة خط التقاطع هي ع = ٣ + ٥ص = $\frac{٥س - ١٤}{٧}$

س١٣: اوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

٢س - ٣ص + ع - ٥ = ٠ ، س + ص + ع + ٦ = ٠ ويمر بالنقطة

(-١ ، ٠ ، -٣)

الحل: معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين هـ

٢س - ٣ص + ع - ٥ + ل(س + ص + ع + ٦) = ٠

النقطة (-١ ، ٠ ، -٣) تحققه

٢×(-١) - ~~٣×٠~~ + (-٣) - ٥ + ل(-١ + ٠ - ٣ + ٦) = ٠

ومنها ل = $\boxed{٥}$

∴ المعادلة ٢س - ٣ص + ع - ٥ + ٥س + ٥ص + ٥ع + ٣٠ = ٠

٧س + ٢ص + ٦ع + ٢٥ = ٠

س١٤: إذا قطع المستوى $٢س - ص - ٢ع + ١٢ = ٠$ الكرة $(س + ٣)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع - ١)^2 = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل: المقطع الناتج هو سطح دائرة

من معادلة الكرة نق $= \sqrt{١٥}$ ومركزها $(-٣ ، -٢ ، ١)$

لإيجاد نصف قطر المقطع

نوجد طول العمود المرسوم من م على المستوى وليكن م د

$$م د = \frac{|٢ \times (-٣) + (-١) \times (-٢) + (-٢) \times ١ + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \frac{٦}{٣} = \boxed{٢}$$

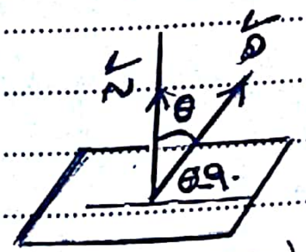
$$أ د = نق_{للمقطع} = \sqrt{(م أ)^2 - (م د)^2} = \sqrt{١٥ - ٤} = \sqrt{١١}$$

∴ مساحة المقطع الناتج $= \pi$ نق^2 $= \pi \times ١١ = ١١\pi$ وحدة مربعة

س١٥: أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم

$$\frac{س - ٣}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع - ٢}{١}$$ والمستوى $\sqrt{٢}\, س - ص - ع = ٥$

الحل: ملحوظة: الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه على المستوى



نوجد θ هي الزاوية بين $\vec{ه}$ ، $\vec{ن}$ حيث $\vec{ه} = (\sqrt{٢} ، ١ ، -١)$

$\vec{ن} = (\sqrt{٢} ، -١ ، -١)$

$$جتا\, θ = \frac{|\vec{ن} \cdot \vec{ه}|}{\|\vec{ن}\| \, \|\vec{ه}\|}$$

$$جتا\, θ = \frac{|(\sqrt{٢} ، -١ ، -١) \cdot (\sqrt{٢} ، ١ ، -١)|}{\sqrt{٢ + ١ + ١} \cdot \sqrt{٢ + ١ + ١}} = \frac{٢ - ١ + ١}{٤} = \frac{١}{٢} \qquad θ = ٦٠^\circ$$

∴ قياس الزاوية بين المستقيم على المستوى هي $٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$

١٦) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات في النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب أوجد مساحة المثلث أ ب جـ ، حجم المجسم و أ ب جـ

الحل: معادلة المستوى بالقسمة على ١٢

$$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٦} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$$

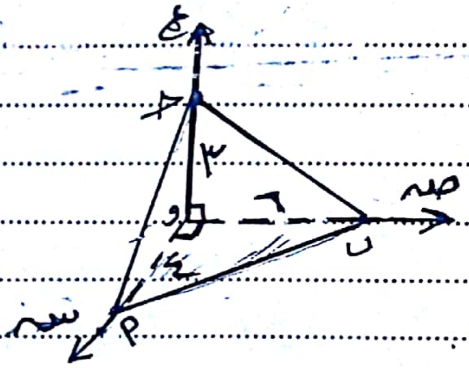
∴ أ(٤ ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ٦ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٠ ، ٣)

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} \|$

$= \frac{١}{٢} \| (-٤ ، ٦ ، ٠) \times (-٤ ، ٠ ، ٣) \|$

$$= \frac{١}{٢} \left| \begin{matrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{matrix} \right| = \frac{١}{٢} \| (١٨ ، ١٢ ، ٢٤) \|$$

مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}\sqrt{(١٨)^٢ + (١٢)^٢ + (٢٤)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢٩}$ وحدة مساحة



حجم المجسم و أ ب جـ (هرم ثلاثي)

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

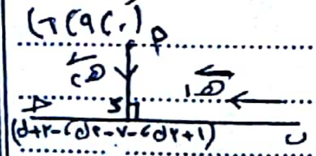
= $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤) × ٣

= ١٢ وحدة مكعبة

س١٧: أوجد مسقط النقطة أ(٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١ ، ٢ ، ٣) ، جـ(٧ ، -٢ ، ٥)

الحل: $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، -٤ ، ٢) ويكون اتجاهه $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، -٢ ، ١)

معادلة المستقيم: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ل(٣ ، -٢ ، ١)



نفرض أن النقطة د مسقط د(١+٣ل ، ٢-٢ل ، ٣+ل) ∈ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أد}}$ = د - أ = (١+٣ل ، -٧-٢ل ، -٣+ل)

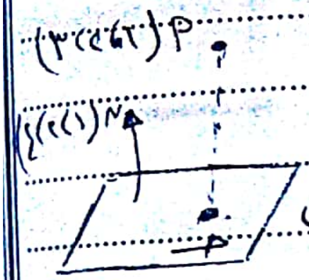
∵ $\overrightarrow{\text{أد}} \perp \overrightarrow{ى}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أد}} \cdot \overrightarrow{ى}$ = صفر

٣ + ٩ل + ١٤ + ٤ل - ٣ + ل = صفر ∴ ل = -١

∴ النقطة = (-٢ ، ٤ ، ٢)

س ١٨: أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى س + ٢ص + ٤ع = ٩

الحل: ∵ $\vec{ن}$ = (١ ، ٢ ، ٤) عمودية على المستوى



∴ $\vec{ن}$ متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{أم}$

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أم}$: $\vec{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك(١ ، ٢ ، ٤)

∴ م (١ + ك ، ٢ + ٢ك ، ٣ + ٤ك) ∈ المستوى

∴ تحقق معادلة المستوى

∴ ١ + ك + ٢(٢ + ٢ك) + ٤(٣ + ٤ك) = ٩

∴ ١ + ك + ٤ + ٤ك + ١٢ + ١٦ك = ٩ وبذلك ك = ②

∴ المسقط م (٣ ، ٦ ، ١١)

س ١٩: أثبت أن معادلة المستوى الذي يقطع محاور الإحداثيات في النقط أ ، ب ، جـ وطالما (م ، ن ، هـ) هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ هي $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{هـ} = ٣$

الحل: نفرض أن أ(س١ ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ص١ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٠ ، ع١)

∴ نقطة تقاطع المتوسطات هي $\left(\frac{س_١}{٣} ، \frac{ص_١}{٣} ، \frac{ع_١}{٣}\right)$

∴ م = $\frac{س_١}{٣}$ ، ن = $\frac{ص_١}{٣}$ ، هـ = $\frac{ع_١}{٣}$

س١ = ٣م ، ص١ = ٣ن ، ع١ = ٣هـ

∴ معادلة المستوى هي $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$

∴ $\frac{س}{٣م} + \frac{ص}{٣ن} + \frac{ع}{٣هـ} = ١$ بالضرب × ٣ ∴ $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{هـ} = ٣$ #

س ٢٠: أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

الحل: ∵ $\vec{ن_١}$ = (٢ ، ١ ، ٢) ، $\vec{ن_٢}$ = (٤ ، ٢ ، ٤) ∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ ∴ $\vec{ن_١} \parallel \vec{ن_٢}$

∴ المستويان متوازيان نوجد نقطة على الأول ولتكن (٤ ، ٠ ، ٠) وذلك بوضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ طول العمود = البعد بينهما = $\frac{|٤ \times ٤ + ٠ + ٠ + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}} = \frac{٢١}{٦} = ٣,٥$ وحدة طول

اجب عن الاسئلة التالية :

(١) من الارقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥ كم عدداً زوجياً أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الارقام مع الاحلال

أ) ٣٠ ب) ٢٥٠ جـ) ١١١ د) ١٥٢٠

(٢) اذا كان ${}^{ن}ق_{٦} : {}^{ن}ق_{٥} = ١ : ٣$ فإن $|ن-٣$ = ...

أ) ٢٤ ب) ١١ جـ) ١٢٠ د) ٦

(٣) الحد الاوسط في مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س^{٢}})^{١٢}$ يساوي ....

أ) ${}^{١٢}ق_{٦}\, س^{-٦}$ ب) ${}^{١٢}ق_{٦}\, س^{٦}$ جـ) ${}^{١٢}ق_{٧}\, س^{-٥}$ د) ${}^{١٢}ق_{٦}$

(٤) اذا كان $ع = ٢\sqrt{٦}\,(جا ٣٠ + ت جتا ٣٠)$ فإن السعة الاساسية للعدد ع = ...

أ) ٣٠° ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

٥) إذا كان ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع = ...

أ) ٤ $هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ ب) ٤ $هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$ جـ) ٤ $هـ^{-\frac{\pi}{٦}ت}$ د) ٤ $هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$

٦) إذا كانت ١، ω، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

١ + ω + $\omega^{٢}$ + $\omega^{٣}$ + ... + $\omega^{١٠٠}$ = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) ω د) $-\omega^{٢}$

٧) إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (−٣، ٢، ٤)، (−٥، ٢، ١٨) هي ...

أ) (−٢، ٢، ٤) ب) ($-\frac{٥}{٢}$، ٥، $\frac{٥}{٢}$) جـ) ($-\frac{٤}{٢}$، $\frac{١}{٢}$، $\frac{٢}{٣}$) د) (−٤، ٢، ٦)

٨) إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س − ٦ص + ٨ع + ٤ = صفر هي معادلة كرة فإن طول قطر الكرة = ...

أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٥ د) ٢٠

(٩) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ = (−٢، ١، ٢) هي ....

أ) (−٢، ١، ٢) ب) $\left(-\frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣}\right)$ جـ) $\left(-\frac{٥}{٢}، ٥، \frac{٥}{٣}\right)$ د) (−١، ١، ١)

---

(١٠) اذا كانت (٤٥°، ٥٤°، هـ°) هي زوايا الاتجاه لمتجه فإنه احدى قيم هـ = ...

أ) ٤٥ ب) ٩٠° جـ) ١٣٥° د) ٦٠°

---

(١١) اذا كانت $\vec{أ}$ = ٢$\vec{س}$ + ٣$\vec{ص}$ − $\vec{ع}$ ، $\vec{ب}$ = ٤$\vec{س}$ − $\vec{ص}$ فإن $\vec{أ}$. $\vec{ب}$ = ...

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٢ د) ٨

---

(١٢) اذا كانت جيوب تمام مستقيمين هي $\left(\frac{٢}{٣}، -\frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣}\right)$ ، $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠\right)$ فإن قياس الزاوية بين المستقيمين = ...

أ) ٦٠° ب) ٣٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

---

(١٣) اوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ يمثلان ضلعان متجاورين حيث $\vec{أ}$ = (٣، ٦، ٣) ، $\vec{ب}$ = (−٦، −٢، −٤)

(١٤) اثبت ان مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١١}$ لا يحتوي على حد خالي من س

(١٥) حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$$

(١٦) اجب عن احدى الفقرتين :

(أ) اوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٣} = −٨ ت على الصورة المثلثية

(ب) اذا كانت ع = $\frac{١}{٢}$ (١ + ت) اوجد الجذور التربيعية له في الصورة المثلثية

---

(١٧) اوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى ٢س + ص − ٤ع = ٠ والواقع على بعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١، ٢، ١)

(١٨) أجب عن إحدى الفقرتين:

أ) إذا كان المستقيمان:

$ل_١ : \vec{ر} = (٢، ٣، -٤) + ك (٢، ٣، م)$

$ل_٢ : \frac{س - ٥}{ب} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$

متوازيان، أوجد قيمة م، ب

ب) أثبت أن المستقيمين:

$ل_١ : \vec{ر} = (١، ٢، ٤) + ك_١ (٤، -٢، ٢)$

$ل_٢$:

$س = ١ - ٦ ك_٢ ، ص = ١ + ١٠ ك_٢ ، ع = ١ + ٣٣ ك_٢$

متعامدان

(١٩) بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٣س & ٣س & ٣س \\ م & ب & ١ \\ ب+١ & م+١ & م+ب \end{vmatrix} = صفر$$

عدد طرق الاختيار (طرق العد)

نفرض أن لدينا (ن) من الأشياء ويراد اختيار (ر) منها

(ر) من (ن)

- مع الإحلال
  - مع الترتيب: $ن^ر$
  - بدون ترتيب: $^{ن+ر-1}ق_ر$
- بدون إحلال
  - مع الترتيب: $^نل_ر$
  - بدون ترتيب: $^نق_ر$

نفرض أن س = {أ، ب، جـ} عدد طرق اختيار حرفين من س مع الإحلال هو $3^2 = 9$

عدد طرق اختيار ٣ مع الإحلال هو

عدد طرق توزيع ٣ كتب على ٤ أرفف أو توزيع ٣ كرات على أربع صناديق هو $^{(4+3-1)}ق_3 = {}^6ق_3 = 20$

نفرض أن س = {أ، ب، جـ} عدد طرق اختيار حرفين مختلفين هو $^3ل_2 = 6$

يراد تكوين لجنة من ③ أشخاص من بين ⑥ أشخاص فإن عدد الطرق هو $^6ق_3 = 20$

ملاحظات

① إذا كان لدينا مضلع له (ن) ضلعاً فإن

أ) عدد القطع المستقيمة التي يحتويها (يمكن تكوينها) = عدد طرق اختيار 2 من ن بدون إحلال وبدون ترتيب = $^{ن}ق_{2}$

ب) عدد القطع المستقيمة الموجهة = عدد طرق اختيار 2 من ن = $^{ن}ل_{2}$ لماذا؟

جـ) عدد أقطاره = عدد القطع التي يحتويها − عدد أضلاعه = $^{ن}ق_{2} - ن$

د) عدد المثلثات التي يمكن تكوينها من رؤوسه = $^{ن}ق_{3}$

② إذا كان لدينا (ن) من الأماكن، (ر) من الأشخاص فإن عدد الطرق التي يمكن لهؤلاء الأشخاص الجلوس في هذه الأماكن

عدد الطرق

في دائرة: $ن \underline{|ر}$

في صف: $(ن-ر+1)\underline{|ر}$

وإذا كان ن = ر

في دائرة: $\underline{|ن-1}$ أو $\underline{|ر-1}$

في صف: $\underline{|ن}$ أو $\underline{|ر}$

$^{ن}ق_{0} + {}^{ن}ق_{1} + {}^{ن}ق_{2} + \dots + {}^{ن}ق_{ن} = 2^{ن}$ = عدد المجموعات الجزئية من س حيث ن(س) = ن

قوانين المضاريب $^{ن}ل_{0} = 1$ ، $^{ن}ل_{1} = ن$

① $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2)\dots(ن-ر+1)$

② $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-1)\dots 3\times2\times1$

③ $\underline{|ن} = ن\underline{|ن-1} = ن(ن-1)\underline{|ن-2}$

④ $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

⑤ بفرض أن س > ص ∴ $\dfrac{\underline{|س}}{\underline{|ص}} = {}^{س}ل_{س-ص}$

⑥ بفرض أن س < ص ∴ $\dfrac{\underline{|س}}{\underline{|ص}} = 1 \div {}^{ص}ل_{ص-س}$

⑦ $\underline{|2ن} = 2^{ن}\,\underline{|ن}\,(1\times3\times5\times\dots(2ن-1))$

⑧ $\underline{|1} = 1$ ، $\underline{|0} = 1$ ∴ $\underline{|س} = 1$ ∴ س ∈ {0، 1}

قوانين التوافيق $^{ن}ق_{0} = 1$ ، $^{ن}ق_{1} = ن$

① $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\,.\,\underline{|ن-ر}} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

② $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فمثلاً $^{ن+1}ق_{ن-1} = {}^{ن+1}ق_{2}$

③ إذا كان $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن إما س = ص أو س + ص = ن

④ $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1} = {}^{ن+1}ق_{ر+1}$

⑤ $\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{ن-ر+1}{ر}$

⑥ $^{ن}ق_{ن} = 1$

خطوات ايجاد الحد المشتمل على $س^ك$ في مفكوك $(أ+ب)^ن$

1) نفرض أن الحد المشتمل على $س^ك$ هو $ح_{ر+1}$ ثم نوجد $ح_{ر+1}$
2) نفصل المعاملات عن السينات عن طريق وضع س = ١ لايجاد المعامل ثم نكتب $ح_{ر+1}$ = المعامل × $(س)^{\text{مجموع الأس}} \rightarrow ك$
3) نساوي مجموع الأس بالعدد (ك) ومن ذلك نوجد (ر) ثم نقوم بالتعويض في ح لايجاد الحد أو المعامل حسب المطلوب
4) إذا كان المطلوب ايجاد الحد الخالي من س نتبع نفس الخطوات ونساوي مجموع الأس بالعدد صفر بدلا من ك
5) إذا كان المطلوب اثبات انه لا يوجد حد يشتمل على $س^ك$ نتبع نفس الخطوات نجد أن (ر) إما كسر أو عدد سالب أو > ن ∴ لا يوجد
6) إذا كانت ن مكرراً للعدد ٧ مثلا ∴ ن ∈ {٧، ١٤، ٢١، .....}

ملاحظات هامة يجب مراعاتها عند حل المسائل

1) إذا ذكر بالمسألة انه في مفكوك $(أ+س)^ن$ حسب قوى س التنازلية لابد من اعادة ترتيب ذي الحدين بحيث يصبح على الشكل $(س+أ)^ن$ قبل البدء في الحل
2) ايجاد $ح_٥$ من النهاية في مفكوك $(أ+ب)^ن$ يكون بالحل ايجاد $ح_٥$ في $(ب+أ)^ن$ من البداية
3) خذ بالك $\frac{ح_٧}{ح_٥} = \frac{ح_٧}{ح_٦} \times \frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{ن-٦+١}{٦} \times \frac{ن-٥+١}{٥} \times \left(\frac{ب}{أ}\right)^٢$
4) تذكر أن الحدين الأوسطان متساويين (٥) إذا كان $ح_٧ = ح_٦$ فإن $\frac{ح_٧}{ح_٦} = ١$
6) عند حل معادلتين في مجهولين تفضل القسمة وأحيانا قد نلجأ إلى تربيع احدى المعادلتين قبل اجراء القسمة
7) الحد العام في $(أ+ب)^ن = ح_{ر+1} = {}^ن ق_ر \cdot أ^{ن-ر} \cdot ب^ر$
8) لايجاد أكبر معامل نستخدم العلاقة $\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_ر} \geq ١$
9) إذا كان المفكوك على الشكل $(أ+ب)^٦ = ٦٤$ ∴ $أ+ب = \pm ٢$
10) إذا كان المفكوك على الشكل $(س - \frac{1}{س})^ن$ فإن الحد الأوسط خاليا من س ن زوجي

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

$$(أ \pm ب)^{ن} = أ^{ن} \pm {}^{ن}ق_{١}\, أ^{ن-١}\, ب + {}^{ن}ق_{٢}\, أ^{ن-٢}\, ب^{٢} \pm \dots + (\pm ب)^{ن}$$

ملاحظات حول المفكوك

١) قوى (أ) تنازلية بينما قوى (ب) تصاعدية بحيث يكون مجموع أسس أ، ب في أي حد يساوي (ن)

٢) عدد حدود الطرف الأيسر (المفكوك) أكبر من الأس بمقدار (١)

٣) الحد العام $= ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر} \cdot ب^{ر}$

٤) $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = ٢[ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \dots]$ = ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة

٥) $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = ٢[ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \dots]$ = ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة

٦) $\boxed{\text{حالات خاصة}}$

أ) $(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر}$ ∴ معامل $س^{ك}$ هو ${}^{ن}ق_{ك}$

ب) $(١+أس)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}(أس) + {}^{ن}ق_{٢}(أس)^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}(أس)^{ن}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}(أس)^{ر}$ ∴ معامل $س^{ك}$ هو ${}^{ن}ق_{ك}\, أ^{ك}$

الحد الأوسط والحدان الأوسطان في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$

i) إذا كانت ن زوجية ∴ يوجد حد أوسط وحيد رتبته $\frac{ن}{٢} + ١$

ii) إذا كانت ن فردية ∴ يوجد حدان أوسطان رتبة الأول $\frac{ن+١}{٢}$ رتبة الثاني $\frac{ن+١}{٢} + ١$

النسبة بين حدين متتاليين $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$

وفي حالة النسبة بين المعاملين

تضع معامل الثاني ،، ،، الأول

الصورة الجبرية للعدد المركب

$ع = س + ص ت$ حيث $س$ ، $ص \in ح$

الجزء الحقيقي ← $س$ ، الجزء التخيلي ← $ص$

$ك = \{ س + ص ت : س ، ص \in ح ، ت^٢ = -١ \}$ لاحظ أن $ح \subset ك$

بعض خواص الأعداد المركبة :

$\forall ع_١ ، ع_٢ \in ك$ حيث $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$

١) $ع_١ = ع_٢ \iff س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$ والعكس صحيح

٢) إذا كان $ع_١ = صفر \iff س_١ = صفر$ ، $ص_١ = صفر$

٣) إذا كان $ص_١ = صفر$ سمي $ع_١$ عدد حقيقي بحت وإذا كان $س_١ = صفر$ كان تخيلي بحت

العمليات على ك

أولاً الجمع: $ع_١ \pm ع_٢ = (س_١ \pm س_٢) + (ص_١ \pm ص_٢) ت$

ثانياً الضرب: $ع_١ \cdot ع_٢ = (س_١ + ص_١ ت)(س_٢ + ص_٢ ت)$

$= (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)$

خد بالك: إذا كان $ع = س + ص ت \therefore ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢} ت$

مرافق العدد المركب:

$\forall ع = س + ص ت$ يكون $\bar{ع} = س - ص ت$

بعض خواص المرافق

* $ع + \bar{ع} = ٢ س$ * $ع - \bar{ع} = ٢ ص ت$

* $ع \cdot \bar{ع} = س^٢ + ص^٢$

* $\overline{(ع_١ \pm ع_٢)} = \bar{ع}_١ \pm \bar{ع}_٢$ * $\overline{(ع_١ \cdot ع_٢)} = \bar{ع}_١ \cdot \bar{ع}_٢$ * $\overline{\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)} = \frac{\bar{ع}_١}{\bar{ع}_٢}$

خد بالك: إذا كان $ع = \bar{ع}$ لابد أن $ع \in$ حقيقي

$\bar{٩} = ٩$ ، $\overline{-٣} = -٣$

قاعدة: لدي معادلة ذات معاملات حقيقية إذا كان أحد جذورها عدد مركب ع لابد أن $\bar{ع}$ جذر آخر لها.

قوى العدد ت :

$\sqrt{-١} = ت$ ، $ت^٢ = -١$

$ت^ن$:
- $ت$ ← ٩٢٥ ← ١
- -١ ← ٥٠ ← ٢
- $-ت$ ← ٢٧٥ ← ٣
- ١ ← مضاعف ٤ ← صفر

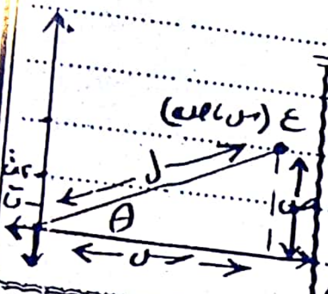
خد بالك

* $ت^{-١} = \frac{١}{ت} = -ت$ ، $ت^{-٣} = \frac{١}{ت^٣} = ت$

* $(١ + ت)^٢ = ٢ ت$ ، $(١ - ت)^٢ = -٢ ت$

* $(١ + ت)^{١٢} = [(١ + ت)^٢]^٦ = (٢ ت)^٦ = ٦٤ ت^٦ = -٦٤$

القياس والسعة للعدد المركب والصورة المثلثية



$|ع| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$ = بعده عن نقطة الاصل

سعة العدد المركب = سع (ع) = $ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$

$ع = (س + ص ت) = (ل ، θ) = \left(\sqrt{س^2+ص^2} ، ظا^{-1}\frac{ص}{س}\right)$

ويقال أنه θ سعة أساسية للعدد المركب مادام $θ \in]-π ، π]$

ويلاحظ أنه قيمة θ تتحدد حسب إشارتي س، ص أي حسب الربع

خد بالك — الذى تقع فيه النقطة التى تمثل العدد المركب فى شكل ارجاند كما يلى

1) (+، +) أى ان ع ∈ الربع الاول ∴ $θ = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ (موجبة) ناتج الآلة

2) (-، +) اى ان ع ∈ الربع الثانى ∴ $θ = π + ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ (موجبة) = 180 + ناتج الآلة

3) (-، -) اى ان ع ∈ الربع الثالث ∴ $θ = -π + ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ (سالبة) = -180 + ناتج الآلة

4) (+، -) اى ان ع ∈ الربع الثالث ∴ $θ = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ناتج الآلة (سالبة)

5) (+، 0) ∴ θ = صفر ∴ اى عدد حقيقى موجب سعته صفر

6) (-، 0) ∴ θ = π ∴ اى عدد حقيقى سالب سعته 180°

7) (0، +) ∴ $θ = \frac{π}{2}$ ∴ اى عدد تخيلى موجب ∴ سعته 90°

9) (0، -) ∴ $θ = -\frac{π}{2}$ ∴ اى عدد تخيلى سالب ∴ سعته -90°

خواص القياس والسعة

1) |ع| ≥ صفر ويكون |ع| = صفر عندما ع = صفر

2) $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$ ، $ع \bar{ع} = |ع|^2 = |\bar{ع}|^2$

3) إذا كانت θ هى السعة الاساسية للعدد المركب فإنه θ + 2نπ سعات مختلفة لـ ع

4) ضرب العدد المركب × عدد حقيقى موجب لا يغير من سعة العدد المركب

مثلا إذا كانت سع (ع) = θ فإنه سع (م ع) = θ ∀ م > صفر

كيفية وضع العدد المركب في صورته المثلثية القياسية

Tomake ISSO

(١) إذا كان ل سالبا نجعله موجبا مثال $-5(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta) = 5[-\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta]$

(٢) إذا لم تكن θ المعطاة $\in [0 ، \frac{\pi}{2}[$ فيجب جعلها كذلك مثال

$ع = 6[\text{جا}\,\frac{4\pi}{2} - \text{ت جتا}\,\frac{4\pi}{2}] = 6[-\text{جا}\,\frac{\pi}{2} + \text{ت جتا}\,\frac{\pi}{2}]$

لكن بقي ؟

$\text{جا}\,\frac{4\pi}{2} = \text{جا}(180 + \frac{\pi}{2}) = -\text{جا}\,\frac{\pi}{2}$

$\text{جتا}\,\frac{4\pi}{2} = \text{جتا}(180 + \frac{\pi}{2}) = -\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}$

(٣) تحدد الربع الذي قد يقع فيه العدد المركب (تحديد اعتباري) طبقا لإشارتي (س، ص) ثم نكتب العدد في صورته السليمة مع ملاحظة أن $\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \text{جا}\,\theta$ ، $\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \text{جتا}\,\theta$

ر١ (+، +)	٢ (-، +)	٣ (-، -)	٤ (+، -)
$\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta \leftarrow \theta$	$-\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta \leftarrow \pi - \theta$	$-\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta \leftarrow -\pi + \theta$	$\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta \leftarrow -\theta$
$\text{جا}\,\theta + \text{ت جتا}\,\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} - \theta$	$-\text{جا}\,\theta + \text{ت جتا}\,\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} + \theta$	$-\text{جا}\,\theta - \text{ت جتا}\,\theta \leftarrow -\frac{\pi}{2} - \theta$	$\text{جا}\,\theta - \text{ت جتا}\,\theta \leftarrow \theta - \frac{\pi}{2}$

لاحظ: إذا كانت θ معطاة فيمكن إيجاد الصورة الجبرية ثم إيجاد الصورة المثلثية

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية القياسية ISSO

الضرب: $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 [\text{جتا}(\theta_1+\theta_2) + \text{ت جا}(\theta_1+\theta_2)]$ نضرب المقاييس ونجمع السعتين

تعميم: $ع_1 ع_2 \dots ع_ن = (ل_1 ل_2 \dots ل_ن) \cdot [\text{جتا}(\theta_1+\theta_2+\dots) + \text{ت جا}(\theta_1+\theta_2+\dots)]$

حالة خاصة: $ع^ن = \{ل[\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta]\}^ن = ل^ن \cdot [\text{جتا}(ن\theta) + \text{ت جا}(ن\theta)]$

القسمة: $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}[\text{جتا}(\theta_1-\theta_2) + \text{ت جا}(\theta_1-\theta_2)]$ نقسم المقاييس ونطرح السعتين

ملاحظات: إذا كان المطلوب السعة الأساسية للعدد $ع_1 ع_2$ أو $ع_1 \div ع_2$ فلابد أن نجعل $(\theta_1+\theta_2)$ أو $(\theta_1-\theta_2) \in]-\pi ، \pi]$ عن طريق إضافة $2ن\pi$

مثلا $\frac{6[\text{جتا}(-90) + \text{ت جا}(-90)]}{2[\text{جتا}(180) + \text{ت جا}(180)]} = 3[\text{جتا}(-270) + \text{ت جا}(-270)]$ نضيف ٣٦٠

$= 3[\text{جتا}\,90 + \text{ت جا}\,90]$

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) والعمليات عليها

$ع = س + ص ت = (ل ، \theta) = ل[جتا\theta + ت جا\theta] = ل هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالدائري

(١) $ع_1 . ع_2 = ل_1 . ل_2 . هـ^{(\theta_1+\theta_2)ت}$ (٢) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} . هـ^{(\theta_1-\theta_2)ت}$

نظرية ديموافر نعلم أن $ع = ل[جتا\theta + ت جا\theta] = ل[جتا(\theta+2ر\pi) + ت جا(\theta+2ر\pi)]$

$$\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}}\left[جتا\left(\frac{\theta+2ر\pi}{ن}\right) + ت جا\left(\frac{\theta+2ر\pi}{ن}\right)\right]$$

وهو مقدار متعدد القيم نحصل عليها بوضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ -- عندما ن فردية
ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ ، ... عندما ن زوجية

الجذور النونية للعدد المركب

$\forall ع \in ك ، ن \in ص^+$ يكون $\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{1}{ن}} \in ك$ حيث $ع^{\frac{1}{ن}}$ تسمى الجذور النونية للعدد ع نحصل عليها بتطبيق نظرية ديموافر وهذه الجذور تمثل برؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه (ن) وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $= \sqrt[ن]{ل}$ حيث $ل = |ع|$

حالة خاصة: إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب ← ١ جبرية - ٢ ديموافر

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

جتا٠ + ت جا٠	جتا١٢٠ + ت جا١٢٠	$هـ^{\frac{4\pi}{3}ت}$
1	ω	ω^2

(١) $\boxed{1+\omega+\omega^2 = صفر}$ $\therefore 1+\omega = -\omega^2 ، 1+\omega^2 = -\omega ، \omega+\omega^2 = -1$

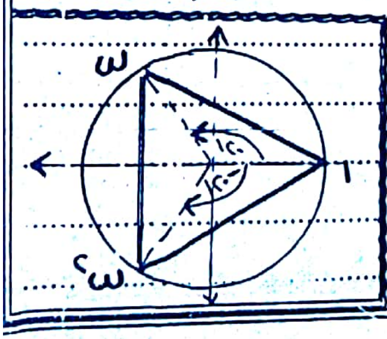
(٢) $\bar{\omega} = \omega^2 ، \bar{\omega}^2 = \omega$ (٣) مربع أحدهما يساوي الآخر ومكعب أيهما يساوي ١

(٤) $\omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}ت ، \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}ت$ ولكن $(\omega - \omega^2) \neq (\omega^2 - \omega)$

(٥) $(1-\omega)^2 = -3\omega ، (1-\omega^2)^2 = -3\omega^2$

(٦) $\frac{\rho}{\omega^2} = \rho\omega ، \frac{\rho}{\omega} = \rho\omega^2$

(٧) قوى العدد $\omega^ن$ ← ω ، ω^2 ، 1 ← (١) ، (٢) ، (٠) مفيش كسر



الوحدة الثالثة المحددات والمصفوفات

خواص المحددات

أولاً قيمة المحدد لا تتغير فى الحالات الآتية :

1) فك المحدد باستخدام عناصر أى صف أو أى عمود
2) تبديل صفوفه بأعمدته بنفس الترتيب $\Delta^{مد} = \Delta$
3) إضافة مضاعفات أى صف [أى عمود] إلى صف أو عمود آخر

ثانياً قيمة المحدد = صفر فى الحالات الآتية

1) جميع عناصر أحد صفوفه أو أحد أعمدته أصفار
2) أحد صفوفه (أحد أعمدته) مضاعف لصف أو عمود آخر [أو يساويه]

ثالثاً قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس إذا كان المحدد فى الصورة المثلثية السفلى أو العليا

$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ \cdot & د & هـ \\ \cdot & \cdot & و \end{vmatrix} = أ\,د\,و$

رابعاً أى محدد يمكن كتابته كمجموع محددين باستخدام أى صف (عمود) والعكس صحيح يمكن جمع محددين بشرط

أ) لهما نفس الدرجة (ب) متشابهان فى جميع الصفوف (الأعمدة) إلا واحد هو الذى سيتم الجمع فيه

خامساً أى محدد = عدد × محدد آخر فى الحالات الآتية

أ) إذا وجد عامل مشترك فى أحد الصفوف (أحد الأعمدة) فإنه يكتب خارج المحدد والعكس عند ضرب عدد × محدد فإنه يضرب فى أى صف أو أى عمود
ب) إذا بدلنا صفين أو عمودين فإن المحدد الناتج = $-1 \times$ المحدد الأصلى
وعموماً إذا كان عدد التبديلات (1) فردى ∴ المحدد الناتج = $-1 \times$ الأصلى
(2) زوجى ∴ المحدد الناتج = الأصلى

سادساً إذا ضربنا عناصر أى صف فى مرافقات عناصر أى صف آخر ثم جمعنا النواتج فإن ناتج الجمع = صفر

(المصفوفات) المصفوفة هي جدول لبعض العناصر في صفوف وأعمدة
توضع بين قوسين على الشكل [ ] أو ( )

نظم المصفوفة هو عدد الصفوف والأعمدة في المصفوفة
مثلا المصفوفة على النظم ٣×٢ يقصد بذلك أنه بها ٣ صفوف وعمودين

بعض المصفوفات الخاصة (١) الصف (٢) العمود (٣) المستطيلة
(٤) المربعة (٥) الصفرية (٦) القطرية (٧) المثلثية (٨) الوحدة I

تساوي مصفوفتين (١) لهما نفس النظم (٢) العناصر المتناظرة متساوية

ضرب عدد × مصفوفة ك . س يضرب العدد ك في جميع عناصر س
والعكس عند أخذ عامل مشترك يؤخذ من جميع عناصرها

مدور المصفوفة بفرض أن $\text{س}_{٣\times ن}$ فإن $\text{س}^{\text{مد}}_{ن\times ٣}$ ويتم ذلك
بجعل ص١ عمود أول ، ص٢ عمود ثاني وهكذا

قاعدة $(\text{س} + \text{ص})^{\text{مد}} = \text{س}^{\text{مد}} + \text{ص}^{\text{مد}}$ ، $(\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{س}$

ضرب المصفوفات يقال أن س ، ص قابلتان للضرب على الشكل

$$\text{س}_{٣\times ن} \; \text{ص}_{ن\times ك} = \text{ع}_{٣\times ك}$$

ملاحظة الضرب ليس ابدالي دائما $أ.ب \neq ب.أ$ دائما

* $(أ.ب)^{\text{مد}} = ب^{\text{مد}} \, أ^{\text{مد}}$
* $(أ.ب.جـ \ldots\ldots ى)^{\text{مد}} = (ى^{\text{مد}} \ldots\ldots جـ^{\text{مد}} \, ب^{\text{مد}} \, أ^{\text{مد}})$
* $\text{س} . I = I . \text{س} = \text{س}$
* إذا كانت أ مربعة وكانت $أ = أ^{\text{مد}}$ قيل أنها متماثلة
وكانت $أ = -أ^{\text{مد}}$ " " شبه متماثلة

مصفوفة العوامل المرافقة - المصفوفة الملحقة - م ، $س^{مل}$

العامل المرافق للعنصر $أ_{صع} = (-1)^{ص+ع} \times$ قيمة المحدد المصاحب

ويسمى هنا فاي م

هي المصفوفة التي نحصل عليها من إيجاد العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة س أما $س^{مل}$ نحصل عليها من تدوير المصفوفة م أي أن $س^{مل} = (م)^{مد}$

المعكوس الضربي للمصفوفة إذا كانت أ مربعة وكان $|أ| \neq$ عندئذ نقول أنه أ غير منفردة

وأحيانا يقال غير شاذة وهذا يعني أنه علينا إيجاد معكوس ضربي لها أي أن $أ^{-1}$ يكون معرفا ويكون

$$\boxed{أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}}$$

ملاحظة: إذا كان $|أ| = ٠$ ∴ $أ^{-1}$ غير معرف

عندئذ نقول أن أ مصفوفة منفردة أو شاذة.

ومن خواص المعكوس الضربي * $(أ^{-1})^{-1} = أ$

* $(أ^{٢})^{-1} = (أ^{-1})^{٢}$

* $(أ.ب)^{-1} = ب^{-1}.أ^{-1}$ * $(أ.ب.جـ ...... ى)^{-1} = ى^{-1} ...... جـ^{-1}.ب^{-1}.أ^{-1}$

خطوات إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة

(١) نوجد $|أ|$ بالطبع $\neq$ صفر (٢) نوجد مصفوفة العوامل المرافقة ونرمزها م أو أ

(٣) نوجد $أ^{مل}$ بتدوير أ أو م (٤) نوجد $أ^{-1}$ من العلاقة $\frac{1}{|أ|} أ^{مل}$

ملاحظة: إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} هـ & جـ \\ و & د \end{pmatrix}$ فإن $أ^{مل} = \begin{pmatrix} و & -جـ \\ -د & هـ \end{pmatrix}$ أي نبدل وضع عنصري القطر الرئيسي ونغير إشارتي عنصري القطر غير الرئيسي فإذا كان $|أ| =$ ل مثلا فإن

$$أ^{-1} = \frac{1}{ل} \begin{pmatrix} و & -جـ \\ -د & هـ \end{pmatrix}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

في هذه الحالة لابد أن عدد المعادلات = عدد المجاهيل

الخطوات

(١) نضع المعادلات على الصورة المصفوفية أ س = ب
حيث أ هي مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المجاهيل
ب مصفوفة الحدود المطلقة

(٢) $س = أ^{-1} ب$ ومن ذلك نوجد المجاهيل

رتبة المصفوفة نفرض أن أ مصفوفة فإن رتبة أ والتي يرمز لها بالرمز ر(أ) تعرف بأنها درجة أكبر محدد قيمته ≠ الصفر يمكن الحصول عليه من عناصر المصفوفة أ

ملاحظات

(أ) إذا كان نظم أ هو $م \times ن$ حيث أ ليست صفرية فإن $1 \le ر(أ) \le ك$ حيث ك أصغر العددين م أو ن

(ب) إذا كانت أ = $\square$ ∴ ر(أ) = صفر والا فإن $ر(أ) \ge 1$

(ج) إذا كانت أ = I ∴ ر(I) = ن حيث ن = ١، ٢، ٣، ...

$ر(أ) = ر(أ^{مد})$

(د) إضافة أي صف أو عمود صفري لا يغير من رتبة المصفوفة

(هـ) إضافة أو حذف صف أو عمود هو عبارة عن تجميع لعدة صفوف أو أعمدة فإن ذلك لا يغير من رتبة المصفوفة

المعادلات الخطية في ن من المجاهيل : أ س = ب

إذا كانت ب مصفوفة صفرية تسمى متجانسة والا فهي غير متجانسة
حيث أ مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المجاهيل ، ب مصفوفة الثوابت

المصفوفة الموسعة $أ^* = (أ \mid ب)$

إمكانية الحل **أولاً** **المتجانسة** : أ س = $\square$

في هذه الحالة $ر(أ) = ر(أ^*)$ لذلك سوف نبحث إمكانية الحل من خلال إيجاد ر(أ)
بفرض أن عدد المجاهيل هو ن توجد لذلك حالتان

(١) ر(أ) = ن يوجد حل وحيد هو الحل الصفري (الحل البديهي)

(ii) ر(أ) < ن يوجد عدد لا نهائي من الحلول من بينها الحل الصفري

ثانيًا **غير المتجانسة**

أ س = ب حيث ب ≠ □

في هذه الحالة نحسب كل من ر(أ) ، ر(أ)* وعدد المجاهيل ن

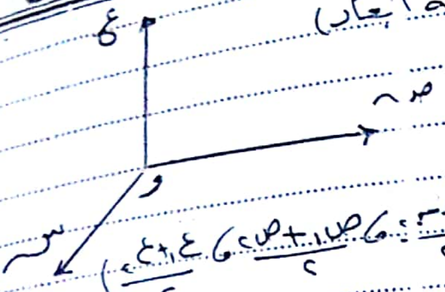
ويوجد لذلك ثلاث حالات

الحالة الأولى: ر(أ) = ر(أ*) = ن يوجد حل وحيد

الحالة الثانية: ر(أ) = ر(أ*) < ن يوجد عدد لا نهائي من الحلول

ويسمى الحل الحل العام (الصورة العامة للحل)

الحالة الثالثة: ر(أ) ≠ ر(أ*) لا يوجد حل على الإطلاق



- احداثيات نقطة في الفراغ (ثلاثة ابعاد) ولتكن $أ(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

- احداثيات منتصف $\overline{أب}$ ولتكن $جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١ ، ع_٢ - ع_١)$

- متجه موضع $أ = \overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = \overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

- معيار المتجه $\overrightarrow{أ} = \| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢ + ع_١^٢}$

- البعد بين نقطتين أ ، ب (طول $\overline{أب}$) $\| \overrightarrow{أب} \| = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

- متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$
$\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$

- متجه الوحدة هو متجه معياره الواحد الصحيح.
- متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ ويكتب $\overrightarrow{ى}_{أ} = \overrightarrow{أ}^{*} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\| \overrightarrow{أ} \|}$

- تساوي متجهين في الفراغ: $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ فإن
$(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع) \Leftarrow أ_س = ب_س ، أ_ص = ب_ص ، أ_ع = ب_ع$

$(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ هي مركبات $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س ومحور ص ومحور ع

- زوايا وجيوب تمام الاتجاه في الفراغ ($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$)

(جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) جيوب تمام الاتجاه

$\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ حيث $أ_س = \| \overrightarrow{أ} \|$ جتا $\theta_س$ ، $أ_ص = \| \overrightarrow{أ} \|$ جتا $\theta_ص$

، $أ_ع = \| \overrightarrow{أ} \|$ جتا $\theta_ع$

$\vec{أ} = ($ أس ، أص ، أع $)$

حيث $($ أس ، أص ، أع $) = \|\vec{أ}\|$ $($ جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع)$

أي أن $($ جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع)$ هو متجه وحدة

جتا$^2 \theta_س$ + جتا$^2 \theta_ص$ + جتا$^2 \theta_ع = ١$

• زوايا اتجاه المحاور :

زوايا اتجاه محور السينات أو أي متجه يوازيه هي (صفر ، ٩٠° ، ٩٠°)

= = = الصادات = = = = (٩٠° ، صفر ، ٩٠°)

= = = ع = = = = (٩٠° ، ٩٠° ، صفر)

• إذا كانت $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ هي زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ فإن

$(\pi - \theta_س ، \pi - \theta_ص ، \pi - \theta_ع)$ = = = = $(-\vec{أ})$

• إذا كان المتجه يصنع مع محاور الاحداثيات زوايا متساوية في القياس

أي أن $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$ فإن

جتا$^2 \theta_س$ + جتا$^2 \theta_ص$ + جتا$^2 \theta_ع = ١$ ∴ ٣ جتا$^2 \theta = ١$ ⟸ جتا$^2 \theta = \frac{١}{٣}$

∴ جتا $\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ θ = ٨ً ٤٤َ ٥٤° أو ٥٢ً ١٥َ ١٢٥°

ملاحظات :

١) النقطة (ل ، ٠ ، ٠) تقع على محور السينات وبعدها عن المستوى ص ع = |ل|

٢) النقطة (٠ ، م ، ٠) تقع على محور الصادات وبعدها عن المستوى س ع = |م|

٣) النقطة (٠ ، ٠ ، ل) = = = ع وبعدها عن س ص = |ل|

٤) النقطة م (س ، ص ، ع) من الفراغ يكون

بعدها عن محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$ بمعنى س

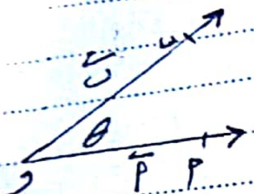
بعدها عن محور الصادات = $\sqrt{س^2 + ع^2}$ = ص

بعدها عن محور ع = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ بمعنى ع

٥) معادلة المستوى س ص هي ع = ٠ ، معادلة المستوى ص ع هي س = ٠

معادلة المستوى س ع هي ص = ٠

الضرب القياسي لمتجهين



أ ٠ ب = ||أ|| ||ب|| جتا θ

حيث θ هي الزاوية الصغرى بين أ ، ب

عند سحبهما داخليه أو خارجيه إلى نقطة واحدة

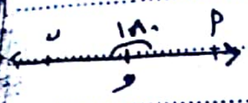
ملاحظات:

(١) اذا كانت θ = صفر فإن أ ٠ ب = ||أ|| ||ب||

أي أن أ ، ب لهما نفس الاتجاه (متوازيان - متطابقان)

(٢) اذا كانت θ = ١٨٠° فإن أ ٠ ب = − ||أ|| ||ب||

أي أن أ ، ب في عكس الاتجاه

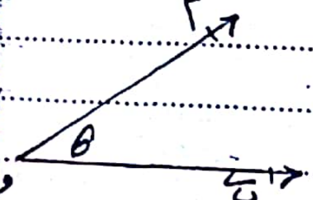


(٣) θ = ٩٠ فإن أ ٠ ب = صفر أي أن أ ⊥ ب

(٤) خواص عملية الضرب القياسي لمتجهين

- أ ٠ أ = ||أ||² ، (ك أ) ٠ ب = ك أ ٠ ب
- أ ٠ ب = ب ٠ أ
- أ ٠ (ب + جـ) = أ ٠ ب + أ ٠ جـ
- س ٠ س = ||س||² = ١ ، ص ٠ ص = ١ ، ع ٠ ع = ١
- س ٠ ص = صفر ، س ٠ ع = صفر ، ص ٠ ع = صفر (متعامدة)

الزاوية بين متجهين



جتا θ = $\dfrac{\text{أ ٠ ب}}{\text{||أ|| ||ب||}}$

حيث θ ∈ [٠ ، π]

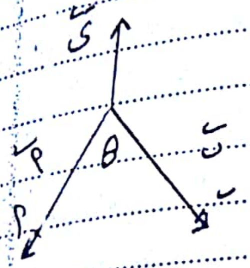
مسقط (مركبة) أ في اتجاه ب = $\dfrac{\text{أ ٠ ب}}{\text{||ب||}}$ = ||أ|| جتا θ

المركبة الاتجاهية لـ أ في اتجاه ب هي $\dfrac{\text{أ ٠ ب}}{\text{||ب||}}$ ٠ ى

أي أن = $\dfrac{\text{أ ٠ ب}}{\text{||ب||}}$ ٠ $\dfrac{\text{ب}}{\text{||ب||}}$ = $\dfrac{\text{أ ٠ ب}}{\text{||ب||}^2}$ ٠ ب

تذكر: اذا كانت أ = (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب = (س٢ ، ص٢ ، ع٢) فإن أ ٠ ب = س١س٢ + ص١ص٢ + ع١ع٢

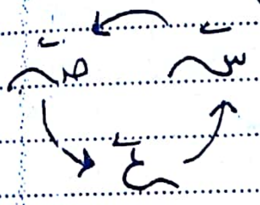
الضرب الإتجاهي لمتجهين:



$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \, \text{جا}\, \theta)\, \overrightarrow{\text{ى}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودي على كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى

- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$
- اذا كانت θ = صفر أو ١٨٠° فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ = صفر
- اذا كانت θ = ٩٠° فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|)\, \overrightarrow{\text{ى}}$
- $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \left| \, \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \, \text{جا}\, \theta \, \right|$
- متجه الوحدة العمودي على كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ هو $\overrightarrow{\text{ى}} = \pm \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}$
- المجموعة اليمنية من متجهات الوحدة الأساسية (متعامدة)

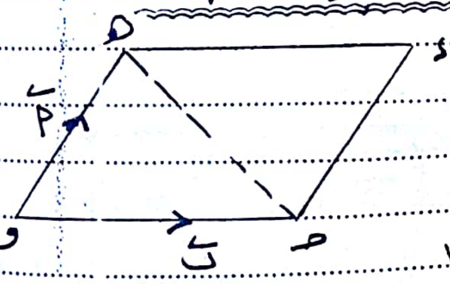


$\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{س}}$

$\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}}$

- **المعنى الهندسي لمعيار حاصل الضرب الإتجاهي**



$\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \, \text{جا}\, \theta$

= مساحة ▱ و ج د هـ

= ٢ م △ و ج هـ

∴ م △ و ج هـ = $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|$

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_\text{س} ، \text{ب}_\text{ص} ، \text{ب}_\text{ع})$ فإن

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\overrightarrow{\text{س}}} & \overset{-}{\overrightarrow{\text{ص}}} & \overset{+}{\overrightarrow{\text{ع}}} \\ \text{أ}_\text{س} & \text{أ}_\text{ص} & \text{أ}_\text{ع} \\ \text{ب}_\text{س} & \text{ب}_\text{ص} & \text{ب}_\text{ع} \end{vmatrix}$$

توازي متجهين: اذا كان $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ فإن $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{0}$ صفر

حيث $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن

$$\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع} = ك$$

أي أن $\vec{أ} = ك \, \vec{ب}$

ك موجب لهما نفس الاتجاه ، ك سالب لهما عكس الاتجاه

حاصل الضرب الثلاثي القياسي:

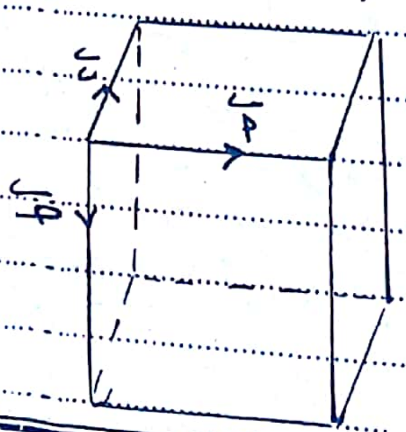
اذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\vec{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ ، $\vec{ج} = (ج_س ، ج_ص ، ج_ع)$ فإن الكمية القياسية

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} = \vec{ب} \cdot \vec{ج} \times \vec{أ} = \vec{ج} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب}$ تعرف بحاصل الضرب الثلاثي القياسي.

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ ج_س & ج_ص & ج_ع \end{vmatrix}$$

نتيجة الاستبدال: ترتيب كتابة المتجهات ع ترتيب دوري واحد

المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي $|\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج}|$ هو حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$ ثلاثة أحرف غير متوازية



اذا كان $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} =$ صفر

فإن المتجهات $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$ تقع في مستوى واحد

الكرة

معادلة الكرة التي مركزها (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق هي:

$$(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$$

حالة خاصة: إذا كان مركز الكرة نقطة الأصل فإن معادلة الكرة تصبح

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = نق^2$$

- الصورة العامة لمعادلة الكرة:

$$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2ل س + 2ك ص + 2ن ع + د = صفر$$

- حيث $د = ل^2 + ك^2 + ن^2 - نق^2$ ويكون $نق^2 = ل^2 + ك^2 + ن^2 - د$

ومركزها هو ($-\frac{1}{2}$ معامل س، $-\frac{1}{2}$ معامل ص، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

ملاحظات

- معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2$ = 1
- معادلة من الدرجة الثانية خالية من الحدود س ص، س ع، ع ص
- إذا كان مركز الكرة نقطة الأصل فإن د = صفر
- إذا كان مركز الكرة (ل، م، ن) وتمس المستوى س ص فإن نق = |ن| ، تمس المستوى س ع فإن نق = |م|
تمس المستوى ص ع فإن نق = |ل|

- إذا كانت الكرة نصف قطرها نق وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة فإن مركزها هو (نق، نق، نق)

- حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi نق^3$

- مساحة سطح الكرة = $4 \pi نق^2$

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم في الفراغ :-

$\vec{ر} = \vec{أ} + ك\,\vec{ى}$ حيث $\vec{أ}$ متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

$\vec{ى}$ متجه اتجاه للمستقيم $\vec{ى} = (أ ، ب ، جـ)$ ، ك ∈ ح ،

$\vec{ر}$ متجه موضع أي نقطة عليه $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$

$(س ، ص ، ع) = (س_1 ، ص_1 ، ع_1) + ك (أ ، ب ، جـ)$

المعادلات البارامترية لخط المستقيم :

$س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$ ، $ع = ع_1 + ك جـ$

الصورة الكارتيزية لخط المستقيم :

$$\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$$

ملاحظات

١) أ ، ب ، جـ ≠ صفراً معاً

٢) إذا كانت أ = صفر تصبح المعادلة $س = س_1$ ، $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$

٣) إذا كانت ب = صفر " " $ص = ص_1$ ، $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$

٤) إذا كانت جـ = صفر " " $ع = ع_1$ ، $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$

٥) يمكن استبدال متجه الاتجاه (أ ، ب ، جـ) بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (جتا $هـ_س$ ، جتا $هـ_ص$ ، جتا $هـ_ع$) = (ل ، م ، ن) وتصبح المعادلة :-

$$\frac{س - س_1}{ل} = \frac{ص - ص_1}{م} = \frac{ع - ع_1}{ن}$$

٦) المعادلة الاتجاهية لمستقيم يمر بنقطة الأصل هي $\vec{ر} = ك (أ ، ب ، جـ)$

٧) إذا كانت $\vec{ى} = (أ ، ب ، ٠)$ فإن المستقيم يوازي المستوى س ص

$\vec{ى} = (أ ، ٠ ، جـ)$ " " " " س ع

$\vec{ى} = (٠ ، ب ، جـ)$ " " " " ص ع

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ: إذا كانت $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ متجهي اتجاه المستقيمين ل_1 ، ل_2

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}}_1 \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}_2|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}_1\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}}_2\|} \quad \text{حيث } \theta \in [0 , \tfrac{\pi}{2}]$$

إذا كانت $(\text{ل}_1 , \text{م}_1 , \text{ن}_1)$ ، $(\text{ل}_2 , \text{م}_2 , \text{ن}_2)$ هما جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين "متجهي وحدة" فإن $\text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{م}_1\text{م}_2 + \text{ن}_1\text{ن}_2|$

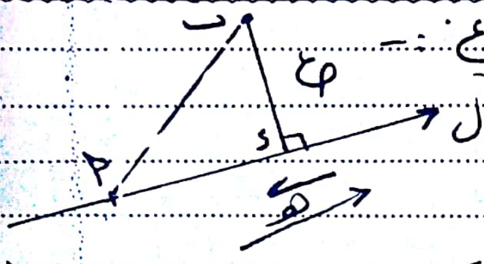
- **شرط توازي وتعامد المستقيمين ل_1 ، ل_2 في الفراغ:**

إذا كانت $\overrightarrow{\text{هـ}}_1 = (\text{أ}_1 , \text{ب}_1 , \text{جـ}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_2 = (\text{أ}_2 , \text{ب}_2 , \text{جـ}_2)$ هما متجهي اتجاه ل_1 ، ل_2 فإن

1. $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ إذا كانت $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$ أي $\overrightarrow{\text{هـ}}_1 = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ أي $\overrightarrow{\text{هـ}}_1 \times \overrightarrow{\text{هـ}}_2 = \vec{0}$
2. $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ إذا كانت $\overrightarrow{\text{هـ}}_1 \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}_2 =$ صفر أي أن $\text{أ}_1\text{أ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 + \text{جـ}_1\text{جـ}_2 =$ صفر

ملاحظة: إذا كانت $\text{ل}_1 \nparallel \text{ل}_2$ فإن ل_1 ، ل_2 إما متقاطعان أو متخالفان

البعد بين نقطة ومستقيم في الفراغ:-



- طول العمود المرسوم من نقطة ب على المستقيم ل = ع = ب د

الطريقة الأولى: $\text{ع} = \text{ب د} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$ حيث $\overrightarrow{\text{هـ}}$ متجه اتجاه المستقيم ل ، أ $\in$ المستقيم ل

الطريقة الثانية: $\text{ع} = \text{ب د} = \sqrt{(\text{أب})^2 - (\text{أد})^2}$ حيث

أد هو مركبة (مسقط) $\overrightarrow{\text{أب}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{هـ}}$ $\therefore \text{أد} = \dfrac{|\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$

معادلات المستوى في الفراغ :

المعادلة المتجهة $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{A}$ أو $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{A}) = $ صفر

حيث $\vec{r} = (س ، ص ، ع)$ ، $\vec{A}$ متجه موضع نقطة معلومة

$\vec{n} = (أ ، ب ، جـ)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى

أي أن : $(أ ، ب ، جـ) \cdot (س ، ص ، ع) = (أ ، ب ، جـ) \cdot (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

الصورة القياسية $أ(س - س_1) + ب(ص - ص_1) + جـ(ع - ع_1) = $ صفر

الصورة العامة : $أ س + ب ص + جـ ع + د = $ صفر حيث

$د = -(أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1)$

• معادلة مستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات في النقط $أ(س_1 ، 0 ، 0)$ ، $ب(0 ، ص_1 ، 0)$ ، $جـ(0 ، 0 ، ع_1)$ فإن المعادلة هي

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

• معادلة مستوى يمر بثلاث نقط $أ(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $ب(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ ، $جـ(س_3 ، ص_3 ، ع_3)$ هي

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

أو نوجد $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ويكون $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ ثم نعوض في المعادلة $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{A}$

• معادلة مستوى بمعلومية مستقيمين متقاطعين فيه $ل_1$ ، $ل_2$ ويحتوي النقطة أ

إذا كان $\vec{h_1}$ ، $\vec{h_2}$ فنكون $\vec{n} = \vec{h_1} \times \vec{h_2}$ لأنه عمودي عليهما وتكون المعادلة $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{A}$

الزاوية بين مستويين : $جتا\,\theta = \dfrac{|\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\|\,\|\vec{ن}_2\|}$

حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $\vec{ن}_1$ ، $\vec{ن}_2$ هما متجها العمودي على المستويين

شرط توازي وتعامد مستويين :-

إذا كان $\vec{ن}_1 = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$ ، $\vec{ن}_2 = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ متجها العمودي لمستويين فإن:

التوازي $\vec{ن}_1 \parallel \vec{ن}_2$

$\vec{ن}_1 = ك(\vec{ن}_2)$

$\dfrac{أ_1}{أ_2} = \dfrac{ب_1}{ب_2} = \dfrac{جـ_1}{جـ_2} = ك$

أو $\vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2 = صفر$

التعامد $\vec{ن}_1 \perp \vec{ن}_2$

$\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2 = صفر$

أي أنه :-

$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 = صفر$

طول العمود المرسوم من نقطة ما إلى مستوى:

(البعد بين نقطة ومستوى)

طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ إلى المستوى الذي معادلته $أ س + ب ص + جـ ع + د = 0$ هو ل حيث

$$ل = \dfrac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

إذا كانت ل = صفر

$\therefore (س_1 ، ص_1 ، ع_1) \in$ المستوى

• لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين.

نوجد نقطة ∈ لأحدهما ثم نوجد طول العمود النازل من هذه النقطة ⊥ المستوى الآخر.